LEÇONS

SUR LES

INVARIANTS INTÉGRAUX

E. CARTAN
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

LEÇONS
SUR LES
INVARIANTS INTÉGRAUX

Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS
J. HERMANN, Successeur
6, rue de la Sorbonne, 6

1922

INTRODUCTION.

Cet ouvrage est la reproduction d'un cours professé pendant le semestre d'été 1920-1921 à la Faculté des Sciences de Paris.

La théorie des Invariants intégraux a été fondée par H. Poincaré et exposée par lui dans le tome III de ses « Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste ».

Dans deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (16 et 30 juin 1902), l'auteur avait été conduit, dans l'étude des équations différentielles admettant des transformations données, à considérer certaines formes différentielles qu'il appelait *formes intégrales* : elles étaient caractérisées par la propriété de pouvoir s'exprimer au moyen des seules intégrales premières des équations différentielles données et de leurs différentielles. C'est en approfondissant ses recherches dans le même ordre d'idées que l'auteur était arrivé, d'une part à fonder sa méthode d'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui admettent des caractéristiques ne dépendant que de constantes arbitraires (caractéristiques de Cauchy), d'autre part à fonder sa théorie de la structure des groupes continus, finis et infinis, de transformations.

Or il se trouve que la notion de forme intégrale ne diffère pas essentiellement de celle d'invariant intégral. C'est la confrontation de ces deux notions qui est à la base du présent ouvrage.

Considérons par exemple un système de trois équations différentielles du premier ordre à trois fonctions inconnues x, y, z, de la variable indépendante t; on peut les regarder comme définissant une infinité de trajectoires d'un point mobile. Une forme différentielle, telle que $P dx + Q dy + R dz + H dt$ par exemple, peut être envisagée comme une quantité attachée à un *état* (x, y, z, t) du mobile et à un *état* infiniment voisin $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Dire que cette forme est *intégrale* (ou *invariante*, suivant la dénomination qui sera adoptée dans ces Leçons), signifie évidemment que cette quantité ne dépend que de la trajectoire qui

contient le premier état et de la trajectoire infiniment voisine qui contient le second état. Autrement dit, une forme invariante ne change pas de valeur si on déplace d'une manière quelconque les deux états (x, y, z, t), $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ sur leurs trajectoires. Si l'on considère alors une suite continue linéaire de trajectoires et si on étend l'intégrale $\int \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$ à l'arc de courbe lieu des positions prises par le mobile sur ces trajectoires *à un même instant* t, cette intégrale est indépendante de t : c'est un *invariant intégral* au sens de H. Poincaré. Inversement il existe un moyen très simple de remonter d'un invariant intégral $\int \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$ de H. Poincaré à la forme invariante correspondante $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{H}dt$.

Ces considérations ne sont pas limitées aux formes différentielles linéaires. Toute forme différentielle invariante susceptible d'être placée sous un signe d'intégration, simple ou multiple, donne naissance à un invariant intégral au sens de H. Poincaré, si l'on y supprime les termes qui contiennent la ou les différentielles de la variable indépendante [1].

En définitive *la quantité sous le signe d'intégration dans un invariant intégral de H. Poincaré n'est autre chose qu'une forme différentielle invariante tronquée*. Le caractère invariant de l'intégrale *complétée* est conservé si elle est étendue à un ensemble quelconque d'états, *simultanés ou non*.

Les conséquences de ce rapprochement entre les deux notions d'invariant intégral et de forme différentielle invariante sont nombreuses. En premier lieu toutes les propriétés relatives à la formation des invariants intégraux, à leur dérivation les uns des autres, deviennent évidentes par elles-mêmes. Il en est de même des applications à l'intégration des équations différentielles.

Une autre conséquence, relative aux principes de la Mécanique, doit être signalée. H. Poincaré a démontré que les équations générales de la Dynamique possèdent la propriété d'admettre un invariant intégral (relatif) linéaire, à savoir

$$(1) \qquad \int p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \ldots + p_n\delta q_n,$$

où les q_i et les p_i désignent les variables canoniques d'Hamilton. Si l'on

[1] M. R. Hargreaves, dans un mémoire des *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (t. XXI, 1912), avait déjà considéré des intégrales contenant la différentielle de la variable indépendante ; mais son point de vue est tout différent de celui du texte, et il fait toujours jouer un rôle à part à la variable indépendante.

complète la forme différentielle sous le signe $\int$, l'invariant intégral prend la forme

$$(2) \qquad \int p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n - H \delta t,$$

où H désigne la fonction d'Hamilton. On voit ainsi apparaître, à côté des *quantités de mouvement* ($p_1, \ldots, p_n$) du système matériel considéré, son *énergie* H. La forme sous le signe $\int$ acquiert ainsi une signification mécanique extrêmement importante ; on peut lui donner le nom de *tenseur « quantité de mouvement-énergie »* (1). L'*action* élémentaire d'Hamilton n'est autre que ce tenseur considéré le long d'une trajectoire : la notion d'*action* est ainsi reliée à celles de quantité de mouvement et d'énergie.

Il y a plus. Non seulement les équations différentielles du mouvement admettent l'invariant intégral (2), mais encore ce sont les seules équations différentielles qui jouissent de cette propriété. On peut alors placer à la base de la Mécanique le principe suivant, auquel on pourrait donner le nom de « principe de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie » :

Les mouvements d'un système matériel (à liaisons holonomes parfaites, soumis à des forces dérivant d'une fonction des forces) sont régis par des équations différentielles du premier ordre entre le temps, les paramètres de position et les paramètres de vitesses, et ces équations différentielles sont caractérisées par la propriété que l'intégrale du tenseur « quantité de mouvement-énergie », étendue à une suite continue linéaire fermée quelconque d'états du système, ne change pas de valeur quand on déplace d'une manière quelconque ces états le long de leurs trajectoires respectives.

Dans cet énoncé l'expression *état* désigne l'ensemble des quantités qui définissent la position du système dans l'espace, l'instant où il est considéré et les vitesses à cet instant.

L'énoncé précédent est plus abstrait et moins intuitif que celui de la moindre action d'Hamilton par exemple. Il a néanmoins sur lui un avantage qu'il importe de signaler. Les équations de Lagrange permettent de donner aux lois de la Mécanique une forme *indépendante du repérage adopté pour l'espace*, et c'est ce qui fait leur importance. Mais le temps

(1) La forme indiquée se présente tout naturellement quand on calcule la variation de l'intégrale d'action d'Hamilton ; elle a déjà été signalée à ce point de vue. C'est du reste ainsi qu'elle est introduite dans ces Leçons.

y garde encore une situation privilégiée. Au contraire le principe de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie donne aux lois de la Mécanique une forme indépendante du repérage adopté pour l'Univers (espace-temps) : si l'on effectue un changement de variables portant *à la fois* sur les paramètres de position du système et sur le temps, il suffit de connaître la forme prise par le tenseur « quantité de mouvement-énergie » dans le nouveau système de coordonnées pour pouvoir en déduire les équations du mouvement. On obtient ainsi un schéma auquel doivent se subordonner toutes les théories mécaniques, et auquel en effet se subordonne la Mécanique relativiste elle-même.

Il est important de faire remarquer que ce schéma ne s'applique qu'aux systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres.

Le présent ouvrage laisse de côté un grand nombre d'applications de la théorie des Invariants intégraux ; en particulier celles, extrêmement importantes en Mécanique céleste, qui se rattachent à la théorie des solutions périodiques du problème des trois corps, à la théorie de la stabilité à la Poisson, sont systématiquement laissées de côté. On s'est limité principalement aux applications relatives à l'intégration des équations différentielles ; mais, même dans cet ordre d'idées, le problème n'est qu'amorcé.

On s'est cependant efforcé de montrer que ce problème ne peut pas être considéré isolément ; on ne fait que l'étriquer si on ne le regarde pas comme un aspect particulier d'un problème plus général dans lequel doit entrer la considération non seulement des invariants intégraux, mais encore des équations de Pfaff invariantes pour les équations différentielles données, et aussi des transformations infinitésimales qui conservent ces équations différentielles. Un exposé complet du problème aurait dépassé de beaucoup le cadre de ces Leçons et aurait au surplus exigé quelque connaissance de la théorie des groupes continus. On s'est borné à montrer en quelques occasions le rôle fondamental joué en dernière analyse par le groupe G des transformations qui, appliquées aux intégrales des équations différentielles données, laissent invariants tous les renseignements connus *a priori* sur ces intégrales [1]. Tout système d'équations différentielles se ramène à des systèmes types, dont chacun correspond à un groupe G *simple*. Si ce groupe simple est *fini*, on obtient des systèmes d'équations

[1] Cf. E. Cartan. — *Les sous-groupes des groupes continus de transformations* ; Ann. Ec. Norm. (3), t. XXV (1908), p. 57-194 (Chap. Ier).

différentielles qui ont été étudiés spécialement par S. Lie et M. E. Vessiot, qui leur a donné le nom de *sytèmes de Lie*. Ils se rattachent à la théorie des invariants intégraux en ce sens que, au besoin par l'adjonction de fonctions inconnues auxiliaires, ils admettent autant d'invariants intégraux linéaires qu'il y a de fonctions inconnues. On trouvera, en les envisageant de ce dernier point de vue, quelques indications générales dans le chapitre XV de ces Leçons.

Si le groupe G simple est *infini*, et si l'on fait abstraction du cas où c'est le groupe le plus général à n variables, auquel cas on ne sait rien sur le système d'équations différentielles correspondant, il admet soit un invariant intégral du degré maximum (théorie du multiplicateur de Jacobi), soit un invariant intégral relatif linéaire (théorie des équations réductibles à la forme canonique), soit une équation de Pfaff invariante (équations se ramenant à une équation aux dérivées partielles du premier ordre). Les chapitres XI-XIV sont consacrés à ces théories classiques.

La notion d'invariant intégral peut être envisagée d'un point de vue un peu différent du point de vue habituel, qui est celui de H. Poincaré, et qui est en somme celui où on s'est placé dans ces Leçons. Au lieu de considérer une intégrale multiple attachée à un système d'équations différentielles vis-à-vis duquel elle jouit d'une propriété d'invariance, on peut la considérer comme attachée à un groupe de transformations par rapport auquel elle est invariante. Les deux points de vue sont du reste connexes. Le dernier est celui auquel s'est placé S. Lie et qui lui a paru pendant quelque temps le seul vrai. Là encore la notion d'invariant intégral joue un rôle important puisque, comme l'auteur l'a montré (¹), tout groupe de transformations peut, au besoin par l'adjonction de variables auxiliaires, être défini comme l'ensemble des transformations qui admettent un certain nombre d'invariants intégraux linéaires. Cet aspect de la notion d'invariant intégral est complètement laissé de côté dans ces Leçons.

Plusieurs chapitres sont consacrés aux règles de calcul des formes différentielles qui se présentent sous les signes d'intégration multiple. M. Goursat donne à ces formes le nom d'expressions symboliques ; je propose de les appeler formes différentielles à multiplication extérieure, ou, plus brièvement, *formes différentielles extérieures*, parce qu'elles

(¹) E. Cartan. — *Sur la structure des groupes infinis de transformations*; Ann. Ec. Norm. (3), t. XXI (1904), p. 153-206; t. XXII (1905), p. 219-308.

obéissent aux règles de la multiplication extérieure de H. Grassmann. De même je propose d'appeler *dérivation extérieure* l'opération qui permet de passer d'une intégrale multiple de degré $p - 1$ étendue à une variété fermée à $p - 1$ dimensions à l'intégrale multiple égale de degré p étendue à la variété à p dimensions limitée par la première (¹). Cette opération, qui se ramène aux opérations classiques de dérivation lorsque les cœfficients de la forme différentielle sous le signe $\int$ admettent des dérivées partielles du premier ordre, peut conserver un sens lorsqu'il n'en est plus ainsi. Il se pose à cet égard des problèmes intéressants qui n'ont pas été systématiquement étudiés et qui mériteraient de l'être.

L'ouvrage se termine par deux chapitres, très sommaires du reste, sur les relations de la théorie des Invariants intégraux avec le Calcul des variations et avec les principes de l'Optique.

On trouvera à la fin du volume une liste, qui n'a pas la prétention d'être complète, des principaux travaux relatifs à la théorie des Invariants intégraux. Les mémoires relatifs aux théories classiques du multiplicateur de Jacobi, des équations canoniques et des équations aux dérivées partielles du premier ordre ne sont cités que lorsqu'ils se rattachent directement à la théorie des Invariants intégraux.

Le Chesnay, 24 novembre 1921.

(¹) C'est l'« opération D » de M. Goursat.

LEÇONS
SUR LES INVARIANTS INTÉGRAUX

CHAPITRE PREMIER.

—

LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION D'HAMILTON ET LE TENSEUR « QUANTITÉ DE MOUVEMENT-ÉNERGIE ».

I. — *Cas du point matériel libre.*

1. On peut fonder toute la Mécanique analytique sur un principe qui ramène la détermination du mouvement d'un système matériel à la résolution d'un problème du Calcul des variations : c'est le *principe de la moindre action* d'Hamilton. Nous allons d'abord l'exposer dans le cas d'un point matériel libre soumis à une force dérivant d'une fonction des forces U, fonction donnée des coordonnées rectangulaires x, y, z du point et du temps t.

Dans ce cas simple le principe d'Hamilton s'énonce ainsi :

Parmi tous les mouvements possibles qui font passer le point matériel d'une position donnée (x_0, y_0, z_0) *à l'instant* t_0 *à une autre position donnée* (x_1, y_1, z_1) *à l'instant* t_1, *le mouvement réel est celui qui rend minima l'intégrale définie*

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right] dt.$$

Dans cette expression m désigne la masse du point ; x', y', z' les composantes de sa vitesse ; la quantité sous le signe somme s'appelle l'*action élémentaire*, et l'intégrale W est l'*action* dans l'intervalle de temps (t_0, t_1).

Pour démontrer ce principe, regardons x, y, z comme des fonctions de t et d'un paramètre arbitraire α et calculons la *variation* de W quand on donne à α un accroissement $\delta\alpha$, en supposant que x, y, z se réduisent à x_0, y_0, z_0 pour $t = t_0$ et à x_1, y_1 z_1 pour $t = t_1$, et cela *quel que soit* α. On a

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left[m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z\right] dt;$$

or on a

$$\delta x' = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,\delta\alpha\right) = \frac{\partial(\delta x)}{\partial t};$$

une intégration par parties donne alors, en remarquant que δx, δy, δz s'annulent aux limites,

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.$$

Si l'on veut que δW soit nul pour $\alpha = 0$ quelles que soient les fonctions δx, δy, δz de t nulles aux limites, il faut et il suffit, en appliquant un raisonnement classique, que l'on ait, pour $\alpha = 0$,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\,\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x},\\ m\,\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y},\\ m\,\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Il résulte de là que *les mouvements que prend le point matériel sous l'action de la force donnée réalisent l'extremum de l'intégrale* W *par rapport à tous les mouvements possibles infiniment voisins correspondant aux mêmes positions initiale et finale du point, et de plus que ces mouvements sont les seuls qui jouissent de cette propriété.*

En toute rigueur on ne peut parler que de l'*extremum* de l'action et non du *minimum*, car la condition que la variation première δW s'annule est une condition nécessaire et non suffisante pour le minimum.

2. L'action élémentaire

$$\left[\frac{1}{2}\,m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right]dt$$

semble introduite ici par un pur artifice de calcul afin de pouvoir énoncer sous une forme condensée les lois du mouvement. Nous allons voir qu'on peut substituer au principe d'Hamilton un autre principe équivalent qui fait aussi apparaître une expression linéaire en dx, dy, dz, dt, mais dont tous les coefficients ont une signification mécanique simple.

Revenons en effet à l'action W, mais en supposant maintenant que t_0 et t_1 sont eux-mêmes des fonctions du paramètre α, les valeurs correspondantes x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 étant aussi des fonctions de α. Le calcul de δW donne, en appliquant les procédés de dérivation d'une intégrale définie,

$$\begin{aligned}\delta W = {} & \left[\frac{1}{2}\,m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right]_{t=t_1}\delta t_1 - \left[\frac{1}{2}\,m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right]_{t=t_0}\delta t_0\\ & + [mx'\delta x + my'\delta y + mz'\delta z]_{t=t_1} - [mx'\delta x + my'\delta y + mz'\delta z]_{t=t_0}\\ & + \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$[\delta x]_{t=t_1} = \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right]_{t=t_1} \delta\alpha, \qquad \delta x_1 = \left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_{t=t_1} \delta t_1 + \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right]_{t=t_1} \delta\alpha,$$

et par suite

$$[\delta x]_{t=t_1} = \delta x_1 - x_1'\delta t_1.$$

La formule qui donne δW est donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \delta W = {} & m x_1'(\delta x_1 - x_1'\delta t_1) + m y_1'(\delta y_1 - y_1'\delta t_1) + m z_1'(\delta z_1 - z_1'\delta t_1) \\ & \qquad + \left[\frac{1}{2} m(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + U_1\right]\delta t_1 \\ & - \Big\{ m x_0'(\delta x_0 - x_0'\delta t_0) + m y_0'(\delta y_0 - y_0'\delta t_0) + m z_0'(\delta z_0 - z_0'\delta t_0) \\ & \qquad + \left[\frac{1}{2} m(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2) + U_0\right]\delta t_0 \Big\} \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \Big] dt. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_\delta = {} & m x'(\delta x - x'\delta t) + m y'(\delta y - y'\delta t) + m z'(\delta z - z'\delta t) \\ & + \left[\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right]\delta t \\ = {} & m x'\delta x + m y'\delta y + m z'\delta z - \left[\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U\right]\delta t. \end{aligned}\right.$$

L'expression différentielle qui s'introduit ainsi a pour coefficients, d'abord

$$m x', \qquad m y', \qquad m z',$$

c'est-à-dire les composantes de la *quantité de mouvement* du mobile, ensuite

$$\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U,$$

c'est-à-dire l'*énergie* E.

Grâce à cette notation on peut écrire

$$\delta W = [\omega_\delta]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] dt.$$

Supposons maintenant qu'on considère une suite de trajectoires réelles dépendant d'un paramètre α et qu'on limite chaque trajectoire dans un intervalle de temps (t_0, t_1) variable avec α. La formule qui donne la variation de l'action le long de ces trajectoires variables se réduit à

$$\delta W = (\omega_\delta)_1 - (\omega_\delta)_0.$$

Supposons enfin que nous considérions un *tube de trajectoires*, c'est-à-dire une suite continue linéaire *fermée* de trajectoires dont chacune est limitée à un intervalle de temps (t_0, t_1) ; la variation totale de l'action quand on est

revenu à la trajectoire initiale est évidemment nulle, de sorte que, en intégrant par rapport à α, on a

$$\int (\omega_\delta)_1 = \int (\omega_\delta)_0.$$

3. Pour interpréter le résultat qui vient d'être obtenu, convenons d'appeler *état* du point matériel l'ensemble de sept quantités

$$x, y, z, x', y', z', t$$

définissant, les trois premières la position du point, les trois suivantes sa vitesse et la dernière l'instant où le point est considéré. On peut regarder un *état* comme un point d'un espace à sept dimensions, l'*espace des états*. Une *trajectoire* peut être définie comme la suite des états qui correspondent à un même mouvement réel du point, c'est-à-dire en somme comme une solution du système d'équations différentielles

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', & m\dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y', & m\dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ \dfrac{dz}{dt} = z', & m\dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$

D'après cela l'*intégrale curviligne*

$$\int \omega_\delta = \int mx'\delta x + my'\delta y + mz'\delta z - E\delta t$$

étendue à une courbe fermée quelconque de l'espace des états ne varie pas si l'on déplace d'une manière quelconque chacun des états qui la composent le long de la trajectoire correspondant à cet état.

On peut encore dire qu'*étant donné un tube quelconque de trajectoires, l'intégrale $\int \omega_\delta$, étendue à une courbe fermée qui fait le tour de ce tube, est indépendante de cette courbe et ne dépend que du tube.*

On peut remarquer que l'expression ω_δ peut être regardée comme le travail élémentaire d'un vecteur de l'univers à quatre dimensions (x, y, z, t) ; ce vecteur aurait pour composantes spatiales les trois composantes ordinaires de la quantité de mouvement et pour composante suivant le temps l'énergie. On peut l'appeler le « tenseur quantité de mouvement-énergie » ; chacune de ses composantes a ainsi une signification mécanique simple.

4. Si on considère une suite d'états *simultanés*, c'est-à-dire si on suppose $\delta t = 0$, l'intégrale $\int \omega_\delta$ se réduit à

$$\int m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) ;$$

en nous plaçant à ce dernier point de vue, nous obtenons le théorème suivant :

Si on considère une suite fermée de trajectoires et si on prend sur ces trajectoires l'état correspondant à un même instant donné t quelconque, l'intégrale $\int m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)$ *étendue à la suite fermée d'états ainsi obtenue est indépendante de t.*

Ce théorème est dû à H. Poincaré qui caractérise la propriété ainsi obtenue en donnant le nom d'*invariant intégral* à l'intégrale

$$\int m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)$$

étendue à un contour fermé.

Dans cette conception de Poincaré, la notion d'énergie n'intervient pas ; elle apparaît nécessairement si, au lieu de considérer une suite fermée d'états *simultanés*, on considère une suite fermée d'états quelconques.

Nous dirons que l'intégrale $\int \omega_\delta$ du tenseur « quantité de mouvement-énergie » est un *invariant intégral complet*, — ou plus simplement *invariant intégral*, quand aucune confusion ne sera à craindre — pour les équations différentielles du mouvement. L'invariant intégral de Poincaré est donc l'invariant intégral complet du tenseur « quantité de mouvement-énergie » envisagé sous un aspect particulier.

Il est remarquable que si, au lieu de considérer une suite d'états simultanés, on considère une suite d'états satisfaisant aux relations

$$\delta x = x'\delta t, \qquad \delta y = y'\delta t, \qquad \delta z = z'\delta t,$$

le tenseur ω_δ se réduit à l'action élémentaire d'Hamilton

$$\left[\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right]\delta t.$$

Par suite l'*invariant intégral de H. Poincaré et l'action d'Hamilton sont deux aspects différents de l'intégrale de la « quantité de mouvement-énergie »*, bien qu'à première vue il n'y ait aucun rapport entre ces deux notions.

5. Dans ce qui précède nous avons simplement déduit du principe d'Hamilton une *propriété* du tenseur « quantité de mouvement-énergie », à savoir que l'intégrale de ce tenseur le long d'une ligne fermée d'états ne change pas quand on déforme cette ligne fermée sans changer les trajectoires sur lesquelles elle s'appuie. Nous allons démontrer maintenant que *cette propriété peut remplacer le principe d'Hamilton*, c'est-à-dire que *les équations différentielles du mouvement sont les seules qui admettent comme invariant intégral l'intégrale* $\int \omega_\delta$ *étendue à un contour fermé quelconque.*

Soit en effet

$$(5) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{dx'}{X'} = \frac{dy'}{Y'} = \frac{dz'}{Z'} = \frac{dt}{T},$$

où les dénominateurs sont des fonctions déterminées des sept variables x, y, z, x', y', z', t, un système quelconque d'équations différentielles. Imaginons un tube de courbes intégrales de ce système dépendant d'un paramètre α; ce paramètre variera par exemple de o à l, la courbe intégrale correspondant à $\alpha = l$ coïncidant avec celle qui correspond à $\alpha = 0$. Pour exprimer que l'intégrale $\int \omega_\delta$ étendue à une courbe fermée faisant le tour de ce tube ne dépend pas de la courbe fermée choisie, nous imaginerons que les coordonnées x, y, z, x', y', z', t d'un état quelconque du tube sont des fonctions du paramètre α et d'un autre paramètre u. En donnant à u une valeur fixe on aura une courbe fermée faisant le tour du tube. En se déplaçant le long d'une courbe intégrale du tube on aura

$$\rho du = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \ldots = \frac{dt}{T},$$

ρ désignant un facteur arbitraire *qu'on pourra toujours choisir de manière à obtenir pour* $u = C^{te}$ *une succession quelconque donnée à l'avance de contours fermés faisant le tour du tube.*

Cela posé l'intégrale $I = \int_{(C)} \omega_\delta$, dans laquelle on donne à u une valeur déterminée, est une fonction de u, et, si on réserve le signe d à un déplacement qui ne fait varier que u, on a

$$dI = \int_{(C)} mdx'\delta x + mdy'\delta y + mdz'\delta z - dE\delta t + mx'd(\delta x) + my'd(\delta y) + mz'd(\delta z) - Ed(\delta t),$$

ou, en échangeant l'ordre des différentiations d et δ et intégrant par parties,

$$dI = [mx'dx + my'dy + mz'dz - Edt]_C + \int_C (mdx'\delta x + mdy'\delta y + mdz'\delta z - dE\delta t - mdx\delta x' - mdy\delta y' - mdz\delta z' + dt\delta E).$$

La partie toute intégrée est manifestement nulle *puisque le contour d'intégration est fermé*. Quant à l'intégrale qui reste dans le second membre, il faut et il suffit, pour que $\int \omega_\delta$ soit un invariant intégral pour le système différentiel considéré, que cette intégrale s'annule lorsqu'on y remplace respectivement

$$dx, dy, dz, dx', dy', dz', dt$$

par

$$\rho X, \rho Y, \rho Z, \rho X', \rho Y', \rho Z', \rho T,$$

et cela *quel que soit le contour fermé* (C) *et quelle que soit la fonction* ρ. On en déduit facilement que les coefficients de

$$dx,\ dy,\ dz,\ dx',\ dy',\ dz',\ dt$$

doivent être identiquement nuls. Par suite *pour qu'un système d'équations différentielles admette l'invariant intégral* $\int \omega_\delta$, *il faut et il suffit que les équations*

$$(6)\ \left\{\begin{aligned} & m dx' + \frac{\partial E}{\partial x} dt = 0, \\ & m dy' + \frac{\partial E}{\partial y} dt = 0, \\ & m dz' + \frac{\partial E}{\partial z} dt = 0, \\ & -m dx + \frac{\partial E}{\partial x'} dt = 0, \\ & -m dy + \frac{\partial E}{\partial y'} dt = 0, \\ & -m dz + \frac{\partial E}{\partial z'} dt = 0, \\ & -dE + \frac{\partial E}{\partial t} dt = 0, \end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} & m dx' - \frac{\partial U}{\partial x} dt = 0, \\ & m dy' - \frac{\partial U}{\partial y} dt = 0, \\ & m dz' - \frac{\partial U}{\partial z} dt = 0, \\ & -m dx + m x' dt = 0, \\ & -m dy + m y' dt = 0, \\ & -m dz + m z' dt = 0, \\ & -m(x'dx' + y'dy' + z'dz') + dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0 \end{aligned}\right.$$

soient des conséquences des équations différentielles du système.

Les six premières de ces équations ne sont autres que les équations différentielles classiques du mouvement; quand à la septième, *elle donne le théorème des forces vives*, qui en est une conséquence.

6. On voit d'après ce qui précède le rôle fondamental joué par le tenseur « quantité de mouvement-énergie ». *Si l'on admet qu'une trajectoire est définie comme une succession d'états constituant une solution d'un système d'équations différentielles ordinaires, ce système est, parmi tous les systèmes imaginables d'équations différentielles, caractérisé par la propriété d'admettre comme invariant intégral l'intégrale curviligne, étendue à un contour fermé quelconque d'états, du tenseur « quantité de mouvement-énergie ».*

On obtient ainsi un principe nouveau qui pourrait être appelé *principe de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.* Comme on l'a vu au numéro précédent, le théorème des forces vives est une conséquence particulière de ce principe.

II. — *Cas général.*

7. Tout ce qui précède peut s'étendre aux systèmes matériels, tels qu'on les considère d'habitude en Mécanique analytique. Nous supposerons que ces systèmes satisfont à trois conditions.

1° *Les liaisons auxquelles ils sont soumis sont parfaites*, c'est-à-dire qu'à chaque instant t la somme des travaux élémentaires des forces de liaison est nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons telles qu'elles existent à cet instant t. Dans ces conditions le principe de d'Alembert est valable et s'énonce ainsi :

PRINCIPE DE D'ALEMBERT. — *Si on considère le mouvement, sous l'action de forces données, d'un système matériel soumis à des liaisons parfaites, à chaque instant la somme des travaux élémentaires des forces données et des forces d'inertie est nulle pour tout déplacement virtuel du système compatible avec les liaisons, telles qu'elles existent à cet instant t.*

Le principe de d'Alembert se traduit par la formule

$$(7) \quad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

où X, Y, Z désignent les composantes de la force donnée appliquée au point (x, y, z) de masse m et où δx, δy, δz désignent les composantes du déplacement élémentaire le plus général compatible avec les liaisons.

Nous ne considérerons maintenant, parmi tous les systèmes à liaisons parfaites, que ceux dont les liaisons sont *holonomes*, c'est-à-dire :

2° *Nous supposerons que les liaisons peuvent se traduire par des équations finies entre les coordonnées des points du système et le temps t.* Cela revient encore à dire qu'il est possible d'exprimer les coordonnées des différents points du système par des formules telles que

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(q_1, \ldots, q_n, t), \\ y_i &= g_i(q_1, \ldots, q_n, t), \qquad (i = 1, 2, \ldots) \\ z_i &= h_i(q_1, \ldots, q_n, t), \end{aligned}$$

avec n paramètres arbitraires q. A chaque système de valeurs des q et de t correspond une position et une seule du système compatible avec les liaisons qui existent à l'instant t. Tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons qui existent à l'instant t s'obtient en donnant à $q_1, \ldots, q_n$ des accroissements arbitraires $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$.

Nous ferons enfin une dernière hypothèse :

3° *La somme des travaux élémentaires des forces données, pour un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons qui existent à l'instant t, est la différentielle totale d'une certaine fonction* U *des q et de t*, c'est-à-dire

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n;$$

on n'a pas fait figurer dans le second membre le terme $\frac{\partial U}{\partial t}\delta t$ parce que les déplacements virtuels dont il est question dans le principe de d'Alembert supposent que t reste constant.

8. Le principe de la moindre action d'Hamilton s'étend sans difficulté aux systèmes précédents. Posons

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right]dt.$$

Regardons les paramètres $q_1, \dots, q_n$ comme des fonctions de t et d'un paramètre α, les limites inférieure et supérieure de l'intégrale pouvant dépendre de α. Un calcul identique à celui qui a été fait plus haut (n° **2**) nous donne la variation δW de l'*action*, quand on donne à α une variation $\delta\alpha$. On obtient

$$(8)\quad \delta W = [\omega_\delta]_1 - [\omega_\delta]_0 + \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta U - \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\right]dt,$$

en posant

$$(9)\quad \begin{cases} \omega_\delta = \sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2) - U\right]\delta t, \\ [\omega_\delta]_1 = \sum m(x_1'\delta x_1 + y_1'\delta y_1 + z_1'\delta z_1) - \left[\frac{1}{2}\sum m(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2) - U_1\right]\delta t_1, \\ [\omega_\delta]_0 = \sum m(x_0'\delta x_0 + y_0'\delta y_0 + z_0'\delta z_0) - \left[\frac{1}{2}\sum m(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2) - U_0\right]\delta t_0. \end{cases}$$

Cela posé, le principe de d'Alembert montre immédiatement que, étant donné un mouvement réel du système, si l'on considère ce mouvement dans un intervalle de temps quelconque (t_0, t_1), il réalise par rapport à tous les mouvements imaginables infiniment voisins qui correspondent à la même *position* initiale et à la même *position* finale du système, un *extremum* de l'action W. Réciproquement les seuls mouvements qui jouissent de cette propriété sont les mouvements réels du système : *c'est le principe de la moindre action* d'Hamilton.

La formule (8) montre de plus que l'intégrale $\int \omega_\delta$ étendue à un contour fermé d'*états* du système (compatibles avec les liaisons) ne change pas si on déforme ce contour fermé en déplaçant d'une manière quelconque chacun des états qui le constituent le long de la trajectoire correspondante du système. Autrement dit *l'intégrale* $\int \omega_\delta$ *est un invariant intégral pour les équations différentielles du mouvement.*

La forme différentielle ω_δ, où l'on suppose que l'on ne considère que des états du système compatibles avec les liaisons, peut encore être appelée tenseur « quantité de mouvement-énergie » du système.

9. Les différentielles δx, δy, δz, δt qui entrent dans l'expression ω_δ ne sont pas en général arbitraires, car elles doivent vérifier les équations obtenues en

différentiant totalement les équations de liaison du système. On peut aussi les exprimer au moyen de

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n, \delta t,$$

si l'on a introduit les n paramètres de position du système. Nous allons nous placer à ce point de vue et déterminer d'une part les équations différentielles du mouvement, d'autre part le tenseur « quantité de mouvement-énergie ». Il nous suffira pour cela de calculer δW, en supposant l'action élémentaire exprimée au moyen des paramètres q et du temps t. Posons

$$T = \sum \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

T, l'énergie cinétique, est une fonction du second degré par rapport aux dérivées $\frac{dq_i}{dt}$, que nous écrirons q_i' et que nous regarderons comme des arguments indépendants des q_i et de t. Posons provisoirement

$$F = T + U, \quad W = \int_{t_0}^{t_1} F dt.$$

Un calcul simple donne

$$\delta W = F_1 \delta t_1 - F_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial q_i'} \delta q_i' \right) dt;$$

or

$$\delta q_i' dt = \delta \frac{\partial q_i}{\partial t} dt = \frac{\partial}{\partial t} (\delta q_i) dt = d(\delta q_i);$$

on a donc, en intégrant par parties,

$$\delta W = F_1 \delta t_1 - F_0 \delta t_0 + \left[\sum \frac{\partial F}{\partial q_i'} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i'} \right) \right] dt.$$

Remarquons enfin qu'on a

$$[\delta q_i]_{t_0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t_0, \alpha) \delta \alpha \quad \text{et} \quad \delta(q_i^0) = \frac{\partial q_i(t_0, \alpha)}{\partial t} \delta t_0 + \frac{\partial q_i(t_0, \alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha,$$

d'où

$$[\delta q_i]_{t_0} = \delta(q_i^0) - q_i'^0 \delta t_0 \quad \text{et} \quad [\delta q_i]_{t_1} = \delta(q_i^{(1)}) - q_i'^{(1)} \delta t_1.$$

On a donc finalement

$$(10) \quad \begin{cases} \delta W = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i'} \right)_1 \delta(q_i^{(1)}) - \left(\sum q_i' \frac{\partial F}{\partial q_i'} - F \right)_1 \delta t_1 \\ \quad - \left[\sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i'} \right)_0 \delta(q_i^0) - \left(\sum q_i' \frac{\partial F}{\partial q_i'} - F \right)_0 \delta t_0 \right] \\ \quad + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i'} \right) \right] dt. \end{cases}$$

Le principe d'Hamilton nous conduit alors aux équations suivantes du mouvement, qui ne sont autres que les *équations de Lagrange*,

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

La comparaison des deux valeurs (8) et (10) trouvées pour δW conduit ensuite à l'expression suivante du tenseur ω_δ

$$(12) \qquad \omega_\delta = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i - H\delta t,$$

en posant

$$(13) \qquad H = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - T - U.$$

Les quantités $\frac{\partial T}{\partial q_i'}$ sont les quantités de mouvement généralisées (rapportées au système de coordonnées choisi); la quantité H est l'*énergie généralisée*.

10. Une remarque simple permet dans la pratique de simplifier le calcul de l'énergie généralisée H. L'énergie cinétique T pourra contenir en général des termes du second degré, des termes du premier degré et des termes de degré zéro en q_1', q_2', ..., q_n', soit

$$T = T_2 + T_1 + T_0;$$

l'application de la formule d'Euler relative aux fonctions homogènes donne alors immédiatement

$$H = T_2 - T_0 - U;$$

dans l'énergie généralisée, le terme T_2 peut être regardé comme d'origine cinétique, le terme $- T_0 - U$ étant d'origine dynamique.

Prenons par exemple le cas d'un point matériel libre rapporté à des axes tournant autour de Oz avec la vitesse angulaire r. On a

$$2T = m[(x' - ry)^2 + (y' + rx)^2 + z'^2]$$

et par suite l'énergie, *rapportée au système de référence choisi*, est

$$H = \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{1}{2} mr^2(x^2 + y^2) - U;$$

la partie d'origine dynamique de l'énergie se décompose en deux termes dont l'un provient des forces données et l'autre des forces centrifuges. Quant aux composantes de la quantité de mouvement, elles sont

$$m(x' - ry), \qquad m(y' + rx), \qquad mz',$$

c'est-à-dire les projections sur les axes de coordonnées choisis de la quantité de mouvement *absolue*.

11. *Variables canoniques d'Hamilton*. — Les équations du mouvement, considérées comme des équations différentielles du premier ordre en

q_i, q_i', t, prennent une forme extrêmement simple si l'on introduit les variables

(14) $$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'};$$

les nouvelles variables, qu'on substitue aux q_i', sont tout simplement les composantes de la quantité de mouvement du système. Le tenseur ω_δ prend alors la forme simple

(15) $$\omega_\delta = \sum p_i \delta q_i - H\delta t,$$

où H doit être regardée comme une fonction des q_i, des p_i et de t.

Nous allons chercher directement les équations du mouvement *en exprimant qu'elles admettent comme invariant intégral l'intégrale* $\int \omega_\delta$ *étendue à une courbe fermée quelconque d'états du système.*

Soit

(16) $$\frac{dq_1}{Q_1} = \frac{dq_2}{Q_2} = \ldots = \frac{dp_n}{P_n} = \frac{dt}{T}$$

un système quelconque d'équations différentielles. Pour exprimer qu'il admet l'invariant intégral $\int \omega_\delta$, nous n'avons qu'à répéter mot pour mot le raisonnement du n° 5. Nous considérons un tube de courbes intégrales du système (16) ; nous exprimons les $2n + 1$ coordonnées p_i, q_i, t d'un état du tube en fonction de deux paramètres α et u, le premier restant constant sur une courbe intégrale et variant dans un intervalle $(o\text{-}l)$ de manière que la courbe intégrale relative à $\alpha = l$ coïncide avec la courbe intégrale relative à $\alpha = 0$. En désignant par d un symbole de différentiation se rapportant à la variable u et posant

$$I = \int_{(C)} \omega_\delta,$$

on a, par une intégration par parties immédiate,

$$dI = \int_{(C)} \sum (dp_i \delta q_i - dq_i \delta p_i) - dH\delta t + dt \delta H.$$

Pour que le système (16) admette l'invariant intégral $\int \omega_\delta$, il faut et il suffit que les coefficients de

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n, \delta t$$

dans la quantité sous le signe $\int$ s'annulent tous en tenant compte des équations du système. Or en annulant ces coefficients on obtient les $2n + 1$ équations

(17) $$\left\{\begin{aligned} dp_i + \frac{\partial H}{dq_i}\, dt &= 0, \\ -\, dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt &= 0, \\ -\, dH + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt &= 0. \end{aligned}\right.$$

Cela montre qu'*il y a un seul système d'équations différentielles admettant l'invariant intégral* $\int \omega_\delta$, et cela nous donne en même temps les équations du mouvement sous la forme *canonique* d'Hamilton :

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \right.$$

La dernière équation

$$dH - \frac{\partial H}{\partial t}\, dt = 0$$

est la traduction analytique du théorème des forces vives ; elle est une conséquence des $2n$ premières équations.

12. Nous arrivons donc, dans le cas général des systèmes matériels de la Mécanique analytique, au *principe généralisé de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie* :

Si l'on admet que tout mouvement d'un système soumis à des forces données est une succession continue d'états satisfaisant à un système d'équations différentielles du premier ordre, ces équations différentielles sont caractérisées par la propriété d'admettre, comme invariant intégral, l'intégrale du tenseur « quantité de mouvement-énergie » étendue à un contour fermé quelconque d'états.

Le tenseur « quantité de mouvement-énergie » se met sous l'une quelconque des formes

$$\omega_\delta = \sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \left[\sum \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U\right]\delta t,$$

$$\omega_\delta = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i - H\delta t \qquad \left(H = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - T - U\right),$$

$$\omega_\delta = \sum p_i \delta q_i - H\delta t.$$

Si l'on se déplace dans l'espace des états de manière à satisfaire aux relations

$$\delta q_i = q_i' \delta t,$$

l'expression ω_δ se réduit à l'action élémentaire d'Hamilton $(T + U)\delta t$; si au contraire on ne considère qu'une suite d'états simultanés ($\delta t = 0$), on obtient l'expression

$$\sum p_i \delta q_i$$

qui constitue l'élément sous le signe $\int$ dans l'invariant intégral proprement dit de H. Poincaré.

13. Le principe de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie permet de former les équations du mouvement, quelle que soit la manière dont on a choisi les paramètres $q_1, \ldots, q_n, t$ servant à localiser le système dans l'espace et dans le temps. Autrement dit il donne aux lois de la Mécanique, comme le fait du reste *implicitement* le principe d'Hamilton, une forme *indépendante de tout mode particulier de repérage de l'espace-temps*. Cette propriété devient analytiquement évidente si, au lieu d'introduire les dérivées $q_1', \ldots, q_n'$ des paramètres spatiaux par rapport au paramètre temporel, on introduit $n + 1$ quantités

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, \dot{t}$$

dont les rapports mutuels sont définis par les égalités

$$\frac{\dot{q}_1}{q_1'} = \frac{\dot{q}_2}{q_2'} = \ldots = \frac{\dot{q}_n}{q_n'} = \frac{\dot{t}}{1}.$$

En posant

$$F = \dot{t}(T + U),$$

où le second membre, homogène et du premier degré en $\dot{q}_i, \ldots, \dot{q}_n, \dot{t}$, est exprimé au moyen des $q_i, t, \dot{q}_i, \dot{t}$, le tenseur « quantité de mouvement-énergie » prend la forme

$$\omega_\delta = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_n}\delta q_n + \frac{\partial F}{\partial \dot{t}}\delta t.$$

Le mouvement d'un point soumis aux forces de gravitation obéit, dans la théorie de la relativité généralisée, au principe précédent : la fonction F est alors de la forme

$$F = \sqrt{\sum a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k}$$

avec quatre variables q_i servant à localiser le point dans l'espace et dans le temps.

III. — *Transformation des équations canoniques. Théorème de Jacobi.*

14. Une application importante des considérations précédentes est relative à la transformation des équations canoniques et à la méthode d'intégration des équations de la Dynamique due à Jacobi.

L'intégrale $\int \omega_\delta$ étendue à un contour fermé ne change évidemment pas si on ajoute à ω_δ une différentielle exacte ; réciproquement si une autre forme différentielle linéaire ϖ_δ jouit de la propriété de donner la même intégrale que ω_δ quand on l'étend à un contour fermé quelconque, ϖ_δ ne diffère de ω_δ que par une différentielle exacte.

Supposons alors qu'on puisse trouver $2n$ variables nouvelles r_i, s_i et une fonction K telles que les deux expressions

$$\omega_\delta = \sum p_i \delta q_i - \mathrm{H}\delta t,$$
$$\varpi_\delta = \sum r_i \delta s_i - \mathrm{K}\delta t,$$

ne diffèrent que par une différentielle exacte. Les équations différentielles du mouvement pourront être caractérisées par la propriété d'admettre l'invariant intégral $\int \varpi_\delta$ et par suite elles s'écriront

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial r_i}, \qquad \frac{dr_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial s_i};$$

la forme canonique des équations sera conservée.

L'hypothèse faite se traduit par une identité de la forme

$$(19) \qquad \sum p_i \delta q_i - \sum r_i \delta s_i - (\mathrm{H} - \mathrm{K})\delta t = \delta \mathrm{V}.$$

Et il est facile de réaliser une telle identité. Partons en effet d'une fonction arbitraire V des $2n + 1$ arguments q_i, s_i, t et posons

$$(20) \qquad p_i = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}, \qquad r_i = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s_i}, \qquad \mathrm{K} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \mathrm{H};$$

si ces équations définissent un changement de variables, c'est-à-dire si les n premières sont résolubles par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_n$, les n suivantes donneront $r_1, \ldots, r_n$; la dernière donnera la fonction K et les nouvelles variables obtenues conserveront la forme canonique des équations de la Dynamique. Il importe de remarquer que si les équations (20) sont résolubles par rapport aux r_i et aux s_i, elles sont inversement résolubles par rapport aux p_i et aux q_i; dans les deux cas en effet la condition de possibilité est que le déterminant

$$\left| \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial q_i \partial s_j} \right|$$

ne soit pas identiquement nul.

La solution obtenue ainsi de l'identité (19) n'est pas la solution la plus générale; elle laisse échapper en effet les cas où les $2n + 1$ quantités q_i, s_i, t seraient liées par une ou plusieurs relations; ces cas singuliers sont du reste faciles à traiter directement en se donnant *a priori* les relations qui existent entre q_i, s_i, et t.

15. La théorie générale précédente devient particulièrement intéressante pour les applications dans deux cas.

Le premier est celui où la fonction K est identiquement nulle; les équations canoniques deviennent

$$\frac{ds_i}{dt} = 0, \qquad \frac{dr_i}{dt} = 0;$$

les équations des trajectoires se réduisent à

$$s_i = a_i, \qquad r_i = b_i,$$

où a_i et b_i sont $2n$ constantes arbitraires. Pour qu'il en soit ainsi il suffit de trouver, d'après les équations (20), une fonction $V(t\,;\,q_1, \ldots, q_n\,;\,a_1, \ldots, a_n)$ satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$(21) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = 0\,;$$

si cette fonction V, où entrent n constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_n$, est telle que le déterminant

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial a_j} \right|$$

ne soit pas identiquement nul, les équations du mouvement sont

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad b_i = -\frac{\partial V}{\partial a_i}\,;$$

c'est le *théorème de Jacobi*. La condition relative au déterminant revient à dire que la fonction V est une *intégrale complète* de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (21) de Jacobi.

La seconde application à signaler se rapporte à la théorie des *perturbations*. Supposons que la fonction H soit la somme de deux termes H_1 et H_2 dont le second soit très petit par rapport au premier : cela revient à partager les forces données en deux groupes dont l'un, très peu important par rapport à l'autre, sera formé de ce qu'on appelle les *forces perturbatrices*. La méthode employée en Mécanique céleste dans ce cas consiste à chercher une intégrale complète V de l'équation de Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_1 = 0,$$

où on ne fait intervenir que le terme principal de la fonction H. Les $2n$ nouvelles variables r_i, s_i qui s'introduisent ainsi seraient constantes *si les forces perturbatrices n'existaient pas* ; ce sont donc les paramètres des trajectoires non troublées. *L'introduction de ces nouvelles variables conserve la forme canonique des équations avec la nouvelle fonction* $K = H_2$, *c'est-à-dire la partie de* H *relative aux seules forces perturbatrices.*

Nous n'insisterons pas davantage, au moins pour le moment, sur la théorie des équations canoniques et les théorèmes de Jacobi. En particulier la relation qui existe entre l'intégration des équations de la Dynamique et l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre *ne contenant pas explicitement la fonction inconnue* s'éclairera d'un jour nouveau quand nous aurons montré qu'à toute équation aux dérivées partielles de cette espèce — ou plus généralement à toute équation aux dérivées partielles du premier ordre admettant une transformation infinitésimale connue — *on peut associer un invariant intégral linéaire.*

CHAPITRE II.

—

L'INVARIANT INTÉGRAL A DEUX DIMENSIONS DE LA DYNAMIQUE.

I. — *Formation de l'invariant intégral à deux dimensions de la Dynamique.*

16. Nous avons vu que l'action élémentaire d'Hamilton pouvait s'obtenir en supposant que dans l'expression

$$\omega_\delta = \sum p_i \delta q_i - H\delta t,$$

on a

$$\delta q_i = q_i' \delta t.$$

Il est remarquable que *les trajectoires d'un système matériel réalisent encore l'extremum de l'intégrale*

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum p_i dq_i - H dt,$$

en supposant simplement que les q_i et les q_i' sont des fonctions quelconques de t assujetties aux seules conditions que les q_i prennent des valeurs données à l'avance aux limites. On ne suppose donc plus, comme dans le principe d'Hamilton, que les q_i' soient les dérivées des q_i par rapport au temps. On peut même plus généralement supposer que les q_i, q_i' et t sont des fonctions d'un même paramètre u variant de o à 1, les quantités q_i et t prenant aux limites des valeurs données.

Un calcul facile donne

$$\delta W = \Big[\sum p_i \delta q_i - H\delta t\Big]_{u=0}^{u=1} + \int_{u=0}^{u=1} \Big(\sum (\delta p_i dq_i - \delta q_i dp_i) - \delta H dt + \delta t dH\Big).$$

La partie tout intégrée est nulle par hypothèse; les équations des extrémales

s'obtiendront en annulant, dans la quantité sous le signe somme, les coefficients de

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta p_n, \delta t;$$

or ce calcul a été fait au n° **11** et nous a donné justement les équations du mouvement sous leur forme canonique.

17. L'expression

$$\sum (dp_i \delta q_i - dq_i \delta p_i) - dH\delta t + dt\delta H,$$

que nous avons rencontrée deux fois, est linéaire par rapport à deux séries de différentielles ; on peut l'écrire sous la forme plus simple

$$d\omega_\delta - \delta\omega_d,$$

en admettant que les deux symboles de différentiation soient échangeables entre eux. Cette expression, que nous désignerons par $\omega'(d, \delta)$, jouit de la propriété qu'elle est nulle toutes les fois que le symbole d définit dans l'espace des états un déplacement élémentaire dans la direction d'une trajectoire, le symbole δ définissant un déplacement élémentaire *arbitraire*. C'est du reste en exprimant cette propriété que nous avons obtenu les relations entre $dq_1, dq_2, \ldots, dp_n, dt$ qui définissent les équations différentielles des trajectoires ou, à un autre point de vue, les équations différentielles qui admettent l'invariant intégral $\int \omega_\delta$.

Considérons maintenant, plus généralement, deux déplacements élémentaires *quelconques* définis par deux symboles de différentiation δ et δ' et proposons-nous de chercher la signification de la forme bilinéaire $\omega'(\delta, \delta')$. Imaginons pour cela un ensemble continu à deux dimensions d'états ; on réalisera un tel ensemble en prenant pour les q_i, p_i et t des fonctions de deux paramètres α et β ; chaque état de l'ensemble pourra être représenté dans un plan par le point de coordonnées (α, β) et l'ensemble sera représenté par une aire du plan. Les symboles δ et δ' se rapporteront respectivement à des accroissements de α seul et de β seul. Considérons alors, dans l'espace des états, quatre états A, B, C, D correspondant respectivement aux valeurs

$$\begin{array}{cc} \alpha, & \beta, \\ \alpha + \delta\alpha, & \beta, \\ \alpha, & \beta + \delta'\beta, \\ \alpha + \delta\alpha, & \beta + \delta'\beta, \end{array}$$

des paramètres, et formons l'intégrale $\int \omega$ étendue au contour fermé ABDC. On a manifestement

$$\int_{AB} = \omega_\delta, \quad \int_{AC} = \omega_{\delta'}, \quad \int_{CD} = \omega_\delta + \delta'\omega_\delta, \quad \int_{BD} = \omega_{\delta'} + \delta\omega_{\delta'}$$

et par suite

$$\int_{\text{ABDC}} = \delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_{\delta} = \omega'(\delta, \delta').$$

18. La forme bilinéaire $\omega'(\delta, \delta')$, qui intéresse en somme un état arbitraire et deux états infiniment voisins, représentant, d'après ce qui précède, la valeur de l'intégrale $\int \omega$ étendue à un contour fermé, est *invariante* pour le système d'équations différentielles des trajectoires, en ce sens qu'elle ne change pas de valeur si on déplace chacun des états le long de la trajectoire correspondante. Cette forme est aussi un élément d'intégrale double : du reste si l'on regarde par exemple p_1 et q_1 comme les coordonnées (dépendant de deux paramètres α et β) d'un point d'un plan, l'expression $\delta p_1\delta' q_1 - \delta q_1 \delta' p_1$ est l'élément d'aire de ce plan rapporté aux coordonnées curvilignes α et β ; c'est ce que l'on écrit d'habitude

$$dp_1 dq_1 \quad \text{ou} \quad \delta p_1 \delta q_1.$$

Cela nous conduit à la notion d'un nouvel invariant intégral

$$(1) \qquad \iint \omega' = \iint \sum \delta p_i \delta q_i - \delta \text{H} \delta t;$$

cette intégrale double, étendue à une aire à deux dimensions dans l'espace des états, se reproduit si on déplace chacun des états de cette aire le long de la trajectoire correspondante. Cette intégrale double s'obtiendrait d'ailleurs, par la formule de Stokes généralisée, comme expression de l'intégrale curviligne

$$\int \omega = \int \left(\sum p_i \delta q_i - \text{H}\delta t\right)$$

étendue au contour fermé qui limite l'aire.

Dans la conception de H. Poincaré, on ne considère que des aires formées d'états *simultanés*. On peut alors énoncer le résultat obtenu sous la forme suivante :

Etant donné un ensemble à deux dimensions de trajectoires, si l'on prend sur chaque trajectoire de l'ensemble l'état correspondant à un instant donné t, l'intégrale double

$$\iint \sum \delta p_i \delta q_i$$

étendue à ces états est indépendante de t.

Comme on le voit, ce théorème n'exprime qu'un aspect particulier de la propriété démontrée plus haut.

19. L'invariant intégral à deux dimensions $\iint \omega'$ est dit par H. Poincaré

absolu, par opposition à l'invariant $\int \omega$, qui est dit *relatif*; cela signifie que l'intégrale double $\iint \omega'$ possède un caractère invariant quel que soit le domaine d'intégration, *ouvert* ou *fermé*, tandis que l'intégrale $\int \omega$ ne possède un caractère invariant que si elle est étendue à un contour *fermé*.

L'intégrale $\iint \omega'$ n'étant pas autre chose que l'intégrale $\int \omega$ étendue à un contour fermé, on peut affirmer que *les équations différentielles du mouvement sont les seules qui admettent l'invariant intégral* $\iint \omega'$. L'invariance de l'intégrale $\iint \omega'$ n'est donc qu'une traduction analytique nouvelle du principe généralisé de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

II. — *Applications à la théorie des tourbillons.*

20. Nous avons jusqu'à présent considéré des ensembles de trajectoires, mais ces ensembles n'étaient réalisés que dans notre imagination. Il y a un cas où de tels ensembles ont une existence concrète. C'est celui d'un fluide parfait soumis à des forces dérivant d'une fonction des forces U. On démontre en effet en Hydrodynamique les équations suivantes

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \gamma_y &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \gamma_z &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{dz}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles γ_x, γ_y, γ_z désignent les composantes de l'accélération de la molécule qui occupe à l'instant t la position (x, y, z), p et ρ désignant respectivement la pression et la densité en ce point.

Ajoutons l'hypothèse qu'il y a entre p et ρ une relation donnée à l'avance, ce qui arrive sûrement si le mouvement est isotherme.

Si nous portons notre attention sur un mouvement déterminé du fluide, nous pouvons regarder p comme une fonction déterminée de x, y, z, t, et en posant

$$q = \int \frac{dp}{\rho},$$

nous voyons que *chaque molécule se comporte comme un point matériel de*

masse I *qui serait placé dans un champ de forces dérivant de la fonction des forces* $U - q$.

Nous avons donc ainsi une réalisation concrète d'une infinité de trajectoires d'un point mobile soumis à des forces données. Remarquons que la partie $-q$ de la fonction des forces représente l'action exercée par les molécules environnantes sur la molécule considérée.

21. La trajectoire de chaque molécule peut être regardée comme une solution particulière du système d'équations différentielles

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, & \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial(U-q)}{\partial x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = v, & \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial(U-q)}{\partial y}, \\ \dfrac{dz}{dt} = w, & \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial(U-q)}{\partial z}; \end{cases}$$

si donc on considère dans le fluide une suite fermée de molécules (prises chacune à un instant quelconque), l'intégrale

$$(4)\qquad \int u\delta x + v\delta y + w\delta z - E\delta t$$

étendue à cette suite fermée ne change pas de valeur si l'on déplace chaque molécule le long de sa trajectoire. Dans cette expression on a posé

$$(5)\qquad E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - U + q;$$

E est l'énergie (par unité de masse) du fluide ; cette énergie est la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, de l'énergie potentielle $-U$ et de l'énergie hydrodynamique interne q.

Si en particulier on considère une suite fermée de molécules, considérées toutes au même instant t, c'est-à-dire une ligne fluide fermée, l'intégrale $\int u\delta x + v\delta y + w\delta z$ *conserve la même valeur si on prend la même ligne fluide (c'est-à-dire la ligne fluide formée des mêmes molécules) à des instants différents du mouvement.* C'est le théorème classique de la *conservation de la circulation* ; on donne en effet le nom de circulation à l'intégrale $\int u\delta x + v\delta y + w\delta z$.

22. Plaçons-nous maintenant à un point de vue un peu différent. Considérons toujours un mouvement particulier de la masse fluide ; dans ce mouvement les composantes u, v, w de la vitesse sont des fonctions déterminées

de x, y, z, t et les trajectoires des différentes molécules peuvent être regardées comme des solutions du système d'équations différentielles

$$
(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, \\ \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dz}{dt} = w, \end{cases}
$$

dans les seconds membres desquelles u, v, w sont supposés remplacés par leurs valeurs en fonction de x, y, z, t. L'intégrale

$$
\int u\delta x + v\delta y + w\delta z - E\delta t
$$

est évidemment encore un invariant intégral relatif pour ces nouvelles équations différentielles. En la transformant en une intégrale double, nous obtiendrons un invariant intégral absolu pour le système (6).

En formant l'expression $\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_{\delta}$, nous obtenons

$$
\omega'(\delta, \delta') = \delta u\delta' x - \delta x\delta' u + \delta v\delta' y - \delta y\delta' v + \delta w\delta' z - \delta z\delta' w - \delta E\delta' t + \delta t\delta' E.
$$

Le second membre est linéaire par rapport aux 6 combinaisons

$$
\begin{array}{lll} \delta y\delta' z - \delta z\delta' y, & \delta z\delta' x - \delta x\delta' z, & \delta x\delta' y - \delta y\delta' x, \\ \delta x\delta' t - \delta t\delta' x, & \delta y\delta' t - \delta t\delta' y, & \delta z\delta' t - \delta t\delta' z. \end{array}
$$

Un calcul simple, qui n'est autre que l'application de la formule de Stokes, donne, pour les coefficients des trois premiers termes,

$$
\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} :
$$

ce sont les composantes du vecteur tourbillon. Pour calculer les trois autres coefficients, nous pouvons utiliser la remarque que, l'expression ω' étant invariante pour les équations (6), les équations obtenues en annulant les coefficients de δx, δy, δz, δt dans $\omega(d, \delta)$ doivent être des conséquences des équations (6). Posons donc

$$
\begin{aligned} \omega'(d, \delta) = {} & \xi(dy\delta z - dz\delta y) + \eta(dz\delta x - dx\delta z) + \zeta(dx\delta y - dy\delta x) \\ & + P(dx\delta t - dt\delta x) + Q(dy\delta t - dt\delta y) + R(dz\delta t - dt\delta z). \end{aligned}
$$

Les équations considérées sont

$$
(7)\qquad \begin{cases} \eta dz - \zeta dy - P dt = 0, \\ \zeta dx - \xi dz - Q dt = 0, \\ \xi dy - \eta dx - R dt = 0, \\ P dx + Q dy + R dz = 0. \end{cases}
$$

En exprimant qu'elles sont une conséquence des équations (6), nous obtenons

$$P = \eta w - \zeta v,$$
$$Q = \zeta u - \xi w,$$
$$R = \xi v - \eta u.$$

Par suite l'invariant intégral double cherché est

(8) $$\iint \xi\delta y\delta z + \eta\delta z\delta x + \zeta\delta x\delta y + (\eta w - \zeta v)\delta x\delta t + (\zeta u - \xi w)\delta y\delta t + (\xi v - \eta u)\delta z\delta t.$$

Étendue à une aire formée de molécules prises toutes au même instant t, cette intégrale est le *flux de tourbillon* à travers cette aire : nous retrouvons le théorème de la conservation du flux de tourbillon à travers une surface fluide.

23. Nous aurions pu faire le calcul direct de l'expression $\omega'(d, \delta)$. En particulier le coefficient P de $dx\delta t$ est manifestement

$$P = -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

en écrivant qu'il est égal à la valeur trouvée précédemment

$$P = \eta w - \zeta v = w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

on obtient l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

qui n'est pas autre chose que la première équation de l'Hydrodynamique ; le premier membre est en effet l'expression développée de γ_x.

Ce résultat nous rappelle que l'intégrale $\int u\delta x + v\delta y + w\delta z - E\delta t$ n'est invariante pour les équations différentielles (6) que si u, v, w sont les composantes de la vitesse d'une molécule d'un fluide parfait soumis à une force dérivant d'une fonction des forces, ou encore s'il y a un *potentiel des accélérations*.

24. Les équations (7), qui peuvent encore s'écrire

(7) $$\begin{cases} \eta(dz - wdt) - \zeta(dy - vdt) = 0, \\ \zeta(dx - udt) - \xi(dz - wdt) = 0, \\ \xi(dy - vdt) - \eta(dx - udt) = 0, \end{cases}$$

sont une conséquence des équations différentielles (6), mais elles ne sont pas *équivalentes* à ces équations différentielles ; autrement dit *les équations* (6) *des trajectoires ne sont pas les seules à admettre l'invariant intégral* $\int\omega$. Il en est de même en particulier des équations

(9) $$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{0}$$

dont les équations (7) sont manifestement une conséquence. Les solutions de

ces équations sont ce qu'on appelle les *lignes de tourbillon. La propriété des équations différentielles des trajectoires et des équations différentielles des lignes de tourbillon d'admettre le même invariant intégral va nous conduire aux théorèmes fondamentaux de la théorie des tourbillons.*

On peut en effet caractériser un déplacement élémentaire (dx, dy, dz, o) (dans l'Univers à quatre dimensions x, y, z, t) dans la direction d'une ligne de tourbillon par la propriété que la forme bilinéaire $\omega'(d, \delta)$ est nulle, *quel que soit le déplacement* δ : cela résulte immédiatement des équations (7). Cela posé, considérons à un instant donné t une ligne de tourbillon (Γ) ; les molécules qui la composent forment à un autre instant t' une ligne (Γ') : *nous allons montrer que* (Γ') *est une ligne de tourbillon pour l'instant* t'. En effet soit (dx', dy', dz', o) un déplacement élémentaire le long de (Γ') et associons-lui un déplacement *arbitraire* $(\delta x', \delta y', \delta z', \delta t')$. Déplaçons les trois états

$$(x', y', z', t'), \quad (x'+dx', y'+dy', z'+dz', t'), \quad (x'+\delta x', y'+\delta y', z'+\delta z', t'+\delta t')$$

le long de leurs trajectoires respectives, les deux premiers jusqu'à l'instant t, le dernier jusqu'à l'instant $t+\delta t$; nous obtenons un élément à deux dimensions pour lequel (dx, dy, dz, o) représente un déplacement le long de la *ligne de tourbillon* (Γ) ; la forme $\omega'(d, \delta)$ a donc une valeur nulle ; donc elle est nulle aussi pour l'élément primitif et par suite (Γ') est une ligne de tourbillon : c'est le théorème célèbre de Helmholtz.

25. Considérons un tube de tourbillon à l'instant t et deux courbes fermées (C) et (C_1) faisant le tour du tube ; la *circulation* le long de ces deux courbes fermées est la même, puisque $\int \omega$ est un invariant intégral pour les équations différentielles (9) des lignes de tourbillon. A un autre instant t', le tube de tourbillon aura pris une autre position dans l'espace, mais la circulation le long de toute ligne fermée faisant le tour du nouveau tube n'aura pas changé non plus, puisque $\int \omega$ est un invariant intégral pour les équations différentielles des trajectoires. Nous retrouvons la notion de ce qu'on appelle en Hydrodynamique le *moment* ou l'*intensité* d'un tube de tourbillon, quantité qui se conserve pendant toute la durée du mouvement. Cette propriété n'est qu'un aspect particulier de l'invariance de l'intégrale

$$\int u\delta x + v\delta y + w\delta z - \mathrm{E}\delta t$$

pour les équations différentielles des trajectoires et pour celles des lignes de tourbillon.

Nous retrouverons du reste tous ces résultats comme cas particulier d'un théorème général sur les formes différentielles invariantes simultanément pour plusieurs systèmes d'équations différentielles.

Il est inutile de faire remarquer que tout ce qui précède suppose essentiellement que ξ, η, ζ ne sont pas nuls tous les trois, c'est-à-dire que le mouvement du fluide est *rotationnel*.

CHAPITRE III.

—

LES INVARIANTS INTÉGRAUX ET LES FORMES DIFFÉRENTIELLES INVARIANTES.

I. — *Notion générale d'invariant intégral.*

26. Les Chapitres précédents nous ont montré l'importance pour la Mécanique de la notion d'invariant intégral. Nous allons maintenant aborder cette notion dans toute sa généralité.

Considérons un système quelconque d'équations différentielles ordinaires du premier ordre (on sait qu'on peut toujours se ramener à ce cas) que nous écrirons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = X_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = X_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dx_n}{dt} = X_n. \end{array} \right.$$

Nous avons distingué la variable indépendante t et les variables dépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais, comme nous le verrons, cette distinction n'a rien d'essentiel. Nous continuerons à dire que t représente le temps ; l'ensemble des valeurs de $x_1, \ldots, x_n, t$ qui correspond à une solution sera dit constituer une *trajectoire*, que nous pourrons regarder comme une courbe dans l'espace à $n+1$ dimensions $(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Cela posé, H. Poincaré donne le nom d'*invariant intégral* à une intégrale (simple ou multiple) qui, étendue à un ensemble quelconque de points *simultanés* (c'est-à-dire correspondant tous à la même valeur de t), ne change pas de valeur lorsqu'on déplace les points de cet ensemble le long des trajectoires correspondantes jusqu'à un autre instant quelconque t'. L'invariant intégral est dit *absolu* si sa propriété d'invariance a lieu quel que soit le domaine d'inté-

gration ; il est dit *relatif* si la propriété d'invariance n'a lieu que pour un domaine d'intégration *fermé*. L'invariant intégral linéaire

$$\int \sum p_i \delta q_i$$

de la Mécanique est relatif ; l'invariant intégral double

$$\iint \sum \delta p_i \delta q_i$$

de la Mécanique est absolu.

Les formes les plus simples d'invariant intégral sont

$$\int a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 + \ldots + a_n \delta x_n,$$

$$\int \sqrt{a_{11} \delta x_1^2 + a_{22} \delta x_2^2 + \ldots + 2 a_{12} \delta x_1 \delta x_2 + \ldots},$$

$$\iint a_{12} \delta x_1 \delta x_2 + a_{13} \delta x_1 \delta x_3 + \ldots + a_{n-1,\,n} \delta x_{n-1} \delta x_n,$$

$$\iiint a_{123} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + \ldots$$

27. La quantité sous le signe somme dans un invariant intégral est une forme différentielle dans laquelle entrent les variables, dépendantes et indépendante, et leurs différentielles (ou même plusieurs séries de différentielles). Cette forme F peut être considérée en elle-même et elle jouit de la propriété que, calculée pour un point quelconque et un ou plusieurs points infiniment voisins, mais *simultanés*, elle ne change pas de valeur si on déplace ces points le long de leurs trajectoires respectives, *mais en les laissant toujours simultanés.* Il est bien clair qu'à ce point de vue, on pourrait considérer des formes F plus générales que celles qui sont susceptibles d'entrer sous un signe d'intégration, par exemple une fonction rationnelle quelconque (homogène) de $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$.

Comme nous l'ont montré les exemples traités dans les deux premiers Chapitres, *il y a intérêt à ne pas se restreindre à la considération de points simultanés.* Nous allons voir que tout invariant intégral élémentaire au sens de H. Poincaré peut être regardé comme résultant de la suppression, dans un invariant intégral élémentaire plus complet, de tous les termes qui contiennent la différentielle ou les différentielles de la variable indépendante t.

Mais, pour arriver à ce résultat essentiel et qui nous donnera la clef de presque toutes les propriétés des invariants intégraux, il est nécessaire de rappeler rapidement les propriétés classiques des intégrales premières d'un système d'équations différentielles.

II. — *Intégrales premières.*

28. On appelle, comme on sait, *intégrale première* du système (1) une fonction $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ jouissant de la propriété que si l'on y remplace $x_1, \ldots, x_n$ par leurs valeurs en fonction de t correspondant à une trajectoire *quelconque*, la fonction u de t ainsi obtenue se réduit à une constante. Ces intégrales premières sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial t} + X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{2}$$

Imaginons qu'on ait intégré les équations (1) et qu'on ait exprimé les variables dépendantes $x_1, \ldots, x_n$ en fonction du temps t et de leurs valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ pour $t = 0$, soit

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = f_1(t; x_1^0, \ldots, x_n^0), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = f_n(t; x_1^0, \ldots, x_n^0); \end{array}\right.$$

ces équations, résolues par rapport à $x_1^0, \ldots, x_n^0$, donnent pour ces n quantités des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, t$ qui sont évidemment des intégrales premières ; on obtient ainsi un système de n intégrales premières, évidemment *indépendantes*, c'est-à-dire qui ne sont liées par aucune relation identique en $x_1, \ldots, x_n, t$.

Il est clair que toute fonction des intégrales premières $x_1^0, \ldots, x_n^0$ est une intégrale première *et réciproquement* ; car si u est une intégrale première quelconque, sa valeur numérique pour une trajectoire *quelconque* est, d'après sa propriété même, égale à $u(x_1^0, \ldots, x_n^0, 0)$.

La différentielle totale de toute fonction u de $x_1, x_2 \ldots, x_n, t$ peut manifestement se mettre sous la forme

$$du = \lambda_1(dx_1 - X_1 dt) + \lambda_2(dx_2 - X_2 dt) + \ldots + \lambda_n(dx_n - X_n dt) + \lambda dt;$$

la condition nécessaire et suffisante pour que ce soit une intégrale première est que le coefficient λ soit identiquement nul ; on peut s'en rendre compte facilement par un raisonnement direct ; on peut aussi le vérifier en remarquant que λ n'est autre que le premier membre de l'équation (2). Donc *la différentielle de toute intégrale première est une combinaison linéaire des n formes différentielles linéaires*

$$dx_1 - X_1 dt,\ dx_2 - X_2 dt,\ \ldots,\ dx_n - X_n dt,$$

et réciproquement chacune de ces formes est une combinaison linéaire des différentielles de n intégrales premières indépendantes données.

III. — *Invariants intégraux absolus et formes différentielles invariantes.*

29. Cela posé nous allons d'abord nous occuper des invariants intégraux *absolus.* L'élément de tout invariant intégral absolu est une forme différentielle $F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ qui ne change pas de valeur si l'on déplace le point $(x_1, \ldots, x_n, t)$ et le point infiniment voisin $(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n, t)$ sur leurs trajectoires respectives, mais en les considérant toujours au même instant. En particulier considérons-les à l'instant $t = 0$. Nous aurons

$$F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n) = F(x_1^0, \ldots, x_n^0, 0;\ \delta x_1^0, \ldots, \delta x_n^0).$$

Regardons maintenant dans le second membre les x_i^0 comme des intégrales premières du système (1) et remplaçons-les par leurs valeurs en fonction de $x_1, \ldots, x_n, t$; nous obtiendrons une nouvelle identité

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0, 0;\ \delta x_1^0, \ldots, \delta x_n^0) = \Phi(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta t).$$

Le second membre de cette identité est manifestement une quantité dont la valeur numérique n'intéresse que la trajectoire définie par les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ et la trajectoire infiniment voisine. Sa valeur est donc indépendante du point particulier $(x_1, \ldots, x_n, t)$ pris sur la première trajectoire et du point particulier $(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n, t + \delta t)$ pris sur la trajectoire infiniment voisine ; c'est donc aussi un élément d'invariant intégral, mais d'un invariant intégral plus complet que celui qui nous a servi de point de départ, *puisque maintenant nous ne sommes plus obligés de nous restreindre à la considération de points simultanés.*

Remarquons maintenant qu'il est très facile de passer de la forme initiale F à la forme finale Φ. En effet si, dans le calcul de $x_1^0, \ldots, x_n^0, \delta x_1^0, \ldots, \delta x_n^0$, on regardait t comme une constante, on retomberait évidemment sur la forme F ; on a donc

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n, 0) = F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n).$$

Or δt n'intervient que par l'intermédiaire de $\delta x_1^0, \ldots, \delta x_n^0$, et ces n différentielles sont des combinaisons linéaires de

$$\delta x_1 - X_1 \delta t,\ \delta x_2 - X_2 \delta t,\ \ldots,\ \delta x_n - X_n \delta t\,;$$

par suite Φ ne dépend que de ces n combinaisons linéaires et quand on a son expression pour $\delta t = 0$, on a immédiatement son expression pour δt quelconque en remplaçant δx_1 par $\delta x_1 - X_1 \delta t$, etc...

Finalement on a

$$(3)\quad \Phi(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta t) = F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1 - X_1 \delta t, \ldots, \delta x_n - X_n \delta t).$$

30. Résumons les résultats qui viennent d'être obtenus. Ils sont au nombre de deux.

1° La forme F, qui constitue l'*élément* d'un invariant intégral absolu au sens de H. Poincaré, et dans laquelle n'entrent que les différentielles des variables dépendantes, est associée à une forme plus complète Φ dans laquelle intervient en même temps la différentielle (ou les différentielles) de la variable indépendante t. On passe de la forme Φ à la forme F en supprimant les termes qui contiennent δt, et on passe inversement de la forme F à la forme Φ en remplaçant respectivement

$$\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$$

par

$$\delta x_1 - X_1 \delta t, \ \delta x_2 - X_2 \delta t, \ \ldots, \ \delta x_n - X_n \delta t.$$

2° La forme Φ peut s'exprimer au moyen des intégrales premières du système (1) et de leurs différentielles.

Cette dernière propriété met en évidence le caractère invariant de la forme Φ.

Un exemple simple fera bien comprendre la relation entre les deux formes F et Φ. Si l'on part d'une intégrale quelconque u, la différentielle totale δu est manifestement une forme Φ ; la forme F correspondante est

$$F = \frac{\partial u}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \delta x_n,$$

et l'on a bien

$$\Phi = \delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\delta x_1 - X_1 \delta t) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\delta x_2 - X_2 \delta t) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\delta x_n - X_n \delta t).$$

31. Nous conviendrons de dire qu'une forme différentielle qui peut s'exprimer au moyen des intégrales premières du système (1) et de leurs différentielles est une forme *invariante* pour le système (1). La quantité sous le signe d'intégration dans un invariant intégral absolu s'obtient en annulant δt dans une forme invariante. C'est ainsi que l'invariant intégral double de la Dynamique correspond à la forme invariante

$$\sum \delta p_i \delta q_i - \delta H \delta t,$$

ou, si l'on préfère, en introduisant deux séries de différentielles,

$$\Phi = \sum (\delta p_i \delta' q_i - \delta q_i \delta' p_i) - \delta H \delta' t + \delta t \delta' H.$$

Son expression au moyen des intégrales premières p_i^0, q_i^0 est manifestement

$$\Phi = \sum (\delta p_i^0 \delta' q_i^0 - \delta q_i^0 \delta' p_i^0).$$

IV. — *Invariants intégraux relatifs. La fonction d'Hamilton.*

32. Une partie des résultats précédents s'étend à la théorie des invariants intégraux relatifs. C'est ainsi que l'invariant intégral linéaire de la Dynamique, tel qu'il est considéré par H. Poincaré,

$$\int \sum p_i \delta q_i$$

ne changeant pas de valeur quand on déplace chaque état sur sa trajectoire de l'instant t jusqu'à un autre instant quelconque t', est égal à l'intégrale

$$\int \sum p_i^0 \delta q_i^0.$$

Tout invariant intégral relatif peut donc prendre une expression où n'interviennent que les intégrales premières et leurs différentielles et, sous cette forme, il peut être étendu, sans perdre son caractère d'invariance, à tout domaine fermé formé d'états simultanés ou non simultanés.

Mais si dans l'expression nouvelle on remplace les intégrales premières par leurs expressions en fonction des variables dépendantes et indépendante, on obtient sous le signe somme une forme Φ *qui ne se déduit plus de la forme initiale* F *par le même procédé* que dans le cas des invariants absolus. L'égalité

$$\int F(x_1, \ldots, x_n, t;\quad \delta x_1, \ldots, \delta x_n) = \int \Phi(x_1, \ldots, x_n\, t;\quad \delta x_1, \ldots, \delta x_n, 0)$$

a bien lieu en effet pour tout domaine d'intégration *fermé* formé de points simultanés, mais il n'en résulte pas l'égalité terme à terme des deux sommes et l'on n'a plus nécessairement l'identité

$$F(x_1, \ldots, x_n, t;\quad \delta x_1, \ldots, \delta x_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n, t;\quad \delta x_1, \ldots, \delta x_n, 0)$$

qui serait nécessaire pour qu'on pût en déduire, conformément à la formule (3),

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n, t;\ \delta x_1,\ldots,\delta x_n,\delta t) = F(x_1,\ldots,x_n, t;\ \delta x_1 - X_1\delta t,\ldots,\delta x_n - X_n\delta t).$$

C'est ainsi que dans le cas simple d'un point matériel libre, l'élément

$$F = m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z),$$

qui entre sous le signe somme dans l'expression de l'invariant intégral linéaire de H. Poincaré, conduirait à la forme

$$m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - m(x'^2 + y'^2 + z'^2)\delta t$$

qui n'est pas du tout un élément d'invariant intégral complet et qui ne diffère pas par une simple différentielle exacte, comme cela serait nécessaire, de la forme

$$\omega_\delta = m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \left[\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U\right]\delta t.$$

Il est à remarquer que la difficulté qui se présente ici dans le passage d'un invariant intégral relatif au sens de H. Poincaré à l'invariant intégral complet n'a pas grande importance pratique, car tout invariant intégral relatif se ramène à un invariant intégral absolu. On sait en effet qu'une intégrale étendue à un contour fermé, à une surface fermée, etc., se ramène à une intégrale étendue à une aire limitée par le contour fermé, à un volume limité par la surface fermée, etc.

33. Il ne sera pas inutile d'illustrer par quelques exemples les considérations précédentes.

Reprenons l'invariant intégral linéaire (complet) de la Dynamique, c'est-à-dire le tenseur « quantité de mouvement-énergie »

$$\omega_\delta = \sum p_i \delta q_i - \mathrm{H}\delta t.$$

On a l'égalité

$$\int_{(\mathrm{C})} \sum p_i \delta q_i - \mathrm{H}\delta t = \int_{(\mathrm{C}_0)} \sum p_i^0 \delta q_i^0,$$

où on suppose que le contour fermé (C_0) est formé des états qui constituent (C), mais déplacés sur leurs trajectoires jusqu'à l'instant $t = 0$. On peut encore considérer l'intégrale du second membre comme étendue au même contour (C) que l'intégrale du premier membre, à condition d'y regarder les p_i^0 et les q_i^0 comme des fonctions des p_i, des q_i et de t. De ce point de vue les deux expressions

$$\sum p_i \delta q_i - \mathrm{H}\delta t \quad \text{et} \quad \sum p_i^0 \delta q_i^0,$$

donnant la même intégrale le long d'un contour fermé quelconque, ne diffèrent que par une différentielle exacte, et l'on a

$$(4) \qquad \sum p_i \delta q_i - \mathrm{H}\delta t = \delta \mathrm{S} + \sum p_i^0 \delta q_i^0.$$

La fonction S est ce qu'on appelle la fonction d'Hamilton, et elle a une interprétation concrète simple. Si nous nous reportons en effet à la formule (10) du chapitre Ier qui donne la variation de l'action le long d'une trajectoire variable, nous voyons que S *peut être interprétée comme représentant l'action entre l'instant* o *et l'instant* t *le long de la trajectoire qui aboutit à l'état* (p, q, t).

Cette fonction S a été considérée par Hamilton et elle a, au point de vue historique, une certaine importance, car ce sont les remarques d'Hamilton à son sujet qui ont mis Jacobi sur la voie de ses découvertes relatives à l'intégration des équations de la Dynamique. Hamilton remarque en effet que si on savait exprimer la fonction S, non pas en fonction des p_i, q_i et t, mais en fonction des q_i, q_i^0 et t, on aurait par cela même intégré les équations du mouvement. L'identité (4), mise sous la forme

$$\delta \mathrm{S} = \sum p_i \delta q_i - \mathrm{H}\delta t - \sum p_i^0 \delta q_i^0,$$

donnerait en effet

$$(5) \qquad p_i = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}, \quad -p_i^0 = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i^0}, \quad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \mathrm{H} = 0.$$

Les deuxièmes équations donneraient les p_i en fonction de t et des $2n$ valeurs initiales, les premières donneraient les quantités de mouvement p_i. La dernière enfin montre que la fonction S est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \mathrm{H}\left(t, q_i, \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}\right) = 0.$$

La difficulté, dans cette conception, était non pas tant d'intégrer cette équation aux dérivées partielles, que d'en trouver une solution pour laquelle *les constantes arbitraires* q_i^0 *fussent précisément les valeurs initiales des* q_i. Jacobi résolut la difficulté en montrant que cette condition était tout à fait inutile pour faire servir l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (6) à l'intégration des équations du mouvement : c'est ce que nous avons déjà exposé brièvement au n° **14**.

34. Il est assez instructif d'effectuer le calcul effectif de la fonction d'Hamilton S dans un cas simple, par exemple celui d'un point libre de masse 1 qui n'est soumis à aucune force. Ici les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} x &= x_0' t + x_0, & x' &= x_0', \\ y &= y_0' t + y_0, & y' &= y_0', \\ z &= z_0' t + z_0, & z' &= z_0'. \end{aligned}$$

La différence

$$\delta S = \omega_\delta - (\omega_\delta)_0 = x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\delta t - (x_0'\delta x_0 + y_0'\delta y_0 + z_0'\delta z_0)$$

est égale à

$$\delta S = x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\delta t - x'\delta(x - tx') - y'\delta(y - ty') - z'\delta(z - tz')$$

$$= \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\delta t + t(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z'),$$

d'où, en tenant compte de ce que S doit s'annuler avec t,

$$S = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)t.$$

En exprimant S au moyen de x, y, z, x_0, y_0, z_0, t, on obtient

$$S = \frac{1}{2}\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{t}.$$

De cette fonction les formules d'Hamilton (5) permettent de déduire les équations du mouvement

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{x - x_0}{t}, & -x_0' &= \frac{\partial S}{\partial x_0} = -\frac{x - x_0}{t}, \\ y' &= \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{y - y_0}{t}, & -y_0' &= \frac{\partial S}{\partial y_0} = -\frac{y - y_0}{t}, \\ z' &= \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{z - z_0}{t}, & -z_0' &= \frac{\partial S}{\partial z_0} = -\frac{z - z_0}{t}. \end{aligned}$$

V. — *Exemples. La forme « élément de matière »*.

35. Après la parenthèse précédente, revenons aux invariants intégraux *absolus*.

Il est bon, dans les cas les plus simples, de se rendre compte directement du caractère d'invariance des formes différentielles Φ qui se déduisent, comme il a été dit plus haut, des formes F en y remplaçant les δx_i par $\delta x_i - X_i \delta t$.

Prenons pour simplifier un système de deux équations différentielles à deux fonctions inconnues

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y,$$

et partons d'un invariant intégral linéaire absolu

$$I = \int a(x, y, t)\delta x + b(x, y, t)\delta y\,;$$

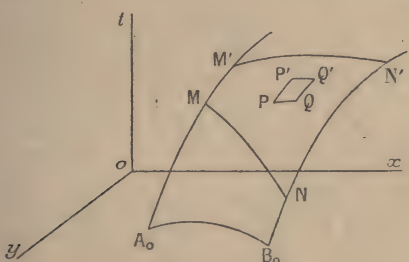
l'invariant intégral complet qui lui est associé est

$$J = \int a(x, y, t)\,(\delta x - X\delta t) + b(x, y, t)\,(\delta y - Y\delta t).$$

Partons dans le plan des xy d'un arc de courbe A_0B_0 et menons par les différents points de cet arc de courbe les trajectoires correspondantes ; on obtient ainsi une espèce de surface cylindrique dont les génératrices (non rectilignes) seraient les trajectoires. Traçons sur cette surface deux arcs de courbe MN et M'N' reliant la trajectoire issue de A_0 à la trajectoire issue de B_0. Nous voulons démontrer que l'on a

$$J_{MN} = J_{M'N'}.$$

Les deux arcs de courbe MN et M'N' limitent, avec les arcs de trajectoire MM' et NN', une aire fermée sur la surface; d'autre part l'intégrale J, étendue



à chacun de ces deux derniers arcs, est évidemment nulle, puisqu'en se déplaçant sur l'un de ces arcs, on a constamment

$$\delta x = X\delta t, \qquad \delta y = Y\delta t.$$

Par suite l'intégrale J étendue au contour fermé MNN'M' est

$$J_{MNN'M'} = J_{MN} - J_{M'N'},$$

et tout revient à démontrer par suite que cette intégrale est nulle. Or d'après la formule de Stokes cette intégrale se ramène à une intégrale de surface

étendue à l'aire MNN'M'. *Nous allons montrer que cette intégrale de surface a son élément nul.* En effet pour cela décomposons la surface en éléments de surface par de petits parallélogrammes formés, d'une part d'arcs de trajectoire, d'autre part *de sections par des plans* $t =$ const. Soit PQQ'P' un de ces éléments de surface. L'élément d'intégrale de surface correspondant est égal à

$$J_{PQ} - J_{P'Q'},$$

mais, *comme les points de* PQ *sont simultanés*, ainsi que ceux de P'Q', J_{PQ} se réduit à I_{PQ} et $J_{P'Q'}$ à $I_{P'Q'}$. Or ces deux intégrales I_{PQ} et $I_{P'Q'}$ sont égales, d'après la propriété admise pour I d'être un invariant intégral.

Donc l'élément d'intégrale de surface est bien nul et le théorème est démontré.

36. Un raisonnement analogue se ferait dans le cas d'un invariant intégral double

$$I = \iint a(x, y, t)\delta x \delta y.$$

Ici le passage de la forme F à la forme Φ est un peu plus difficile que dans le cas précédent. On y arrive en assimilant l'élément de surface $\delta x \delta y$ à une force bilinéaire $\delta x \delta' y - \delta y \delta' x$; il suffit pour cela d'imaginer un système indéterminé de coordonnées curvilignes (α, β) et de regarder δx, δy comme le déplacement élémentaire relatif à un accroissement $\delta\alpha$ de la première coordonnée α, et $\delta' x$, $\delta' y$ comme le déplacement élémentaire relatif à un accroissement $\delta'\beta$ de la seconde β. On a alors

$$F = a \begin{vmatrix} \delta x & \delta y \\ \delta' x & \delta' y \end{vmatrix};$$

on en déduit

$$\Phi = a \begin{vmatrix} \delta x - X\delta t & \delta y - Y\delta t \\ \delta' x - X\delta' t & \delta' y - Y\delta' t \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \delta x & \delta y \\ \delta' x & \delta' y \end{vmatrix} + aX \begin{vmatrix} \delta y & \delta t \\ \delta' y & \delta' t \end{vmatrix} + aY \begin{vmatrix} \delta t & \delta x \\ \delta' t & \delta' x \end{vmatrix},$$

ou, en revenant aux notations en usage dans la théorie des intégrales de surface,

$$\Phi = a\delta x \delta y + aX\delta y \delta t + aY\delta t \delta x.$$

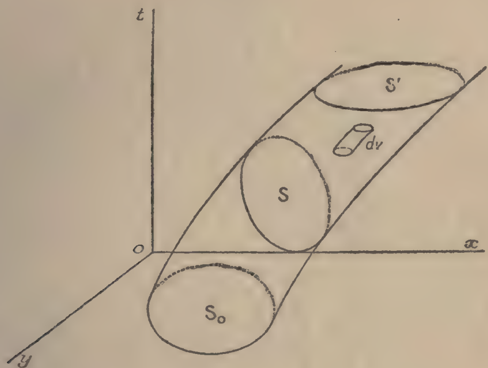
Considérons donc l'intégrale de surface

$$J = \iint a\delta x \delta y + aX\delta y \delta t + aY\delta t \delta x$$

et cherchons à nous rendre compte directement de son caractère invariant. Imaginons pour cela dans le plan des xy une aire quelconque S_0 et construisons les trajectoires issues des différents points de cette aire. Nous obtenons ainsi un volume indéfini limité par une espèce de surface latérale cylindrique engendrée par les trajectoires qui partent du contour de S_0.

Coupons ce volume par deux surfaces quelconques : nous obtenons ainsi à l'intérieur du volume, mais s'étendant jusqu'à la surface latérale, deux aires (planes ou courbes) S et S′. Nous voulons démontrer que l'on a

$$J_S = J_{S'}.$$



Les aires S et S′ délimitent, avec une portion de la surface latérale du cylindre, un volume V ; d'autre part l'intégrale J étendue à l'aire latérale qui limite ce volume est évidemment nulle, puisque, en appelant $d\sigma$ l'élément d'aire, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale, on a

$$J = \iint a(\gamma + X\alpha + Y\beta)d\sigma$$

et que la direction (X, Y, 1), étant celle des tangentes aux trajectoires qui engendrent la surface latérale considérée, est normale à la direction (α, β, γ). Il résulte de là que la différence $J_{S'} - J_S$ peut être regardée comme l'intégrale de surface J étendue à l'aire fermée qui limite le volume V. Tout revient à montrer que l'intégrale de volume équivalente est identiquement nulle. Or l'élément de cette intégrale de volume est évidemment nul : il suffit pour s'en rendre compte de prendre pour volume élémentaire le volume limité latéralement par de petits arcs de trajectoire et aux extrémités par deux aires planes *parallèles au plan des xy*, car alors l'intégrale de surface J étendue à chacune des bases se réduit à l'intégrale I et la valeur de l'intégrale I est, par hypothèse, la même pour les deux bases.

37. La Cinématique des milieux continus va nous fournir une illustration concrète des considérations développées dans ce Chapitre.

Dans un milieu continu en mouvement, la trajectoire de chaque molécule peut être regardée comme une solution du système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w,$$

où u, v, w, les composantes de la vitesse, sont supposées exprimées en fonction de x, y, z, t. Soit d'autre part $\rho(x, y, z, t)$ la densité à l'instant t au point (x, y, z). La masse qui remplit à l'instant t un volume quelconque V est donnée par l'intégrale triple

$$\iiint_V \rho\delta x\delta y\delta z;$$

cette intégrale constitue évidemment un invariant intégral absolu au sens de H. Poincaré : c'est même le premier exemple d'invariant intégral donné par H. Poincaré. Si les molécules qui remplissent le volume V à l'instant t remplissent le volume V′ à un autre instant t', on a évidemment

$$\iiint_V \rho(x, y, z, t)\delta x\delta y\delta z = \iiint_{V'} \rho(x', y', z', t')\delta x'\delta y'\delta z'.$$

La forme Φ associée à la forme $F = \rho\delta x\delta y\delta z$ va être calculée, comme dans l'exemple précédent, en écrivant F sous la forme

$$F = \rho \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta' x & \delta' y & \delta' z \\ \delta'' x & \delta'' y & \delta'' z \end{vmatrix};$$

on en déduit

$$\Phi = \rho \begin{vmatrix} \delta x - u\delta t & \delta y - v\delta t & \delta z - w\delta t \\ \delta' x - u\delta' t & \delta' y - v\delta' t & \delta' z - w\delta' t \\ \delta'' x - u\delta'' t & \delta'' y - v\delta'' t & \delta'' z - w\delta'' t \end{vmatrix},$$

d'où, par un calcul facile,

$$\Phi = \rho(\delta x\delta y\delta z - v\delta y\delta z\delta t - v\delta z\delta x\delta t - w\delta x\delta y\delta t).$$

Cette forme Φ représente l'*élément de matière* envisagé sous son aspect cinématique complet. Si l'on considère un ensemble quelconque à trois dimensions de molécules, et si l'on prend chaque molécule de l'ensemble à un instant quelconque t de son mouvement, on obtient dans l'univers à quatre dimensions (x, y, z, t) un domaine à trois dimensions; l'intégrale triple de Φ étendue à ce domaine sera égale à la masse totale de l'ensemble des molécules considérées. Si les molécules sont prises toutes au même instant t, elles remplissent à cet instant un certain volume V et l'intégrale de Φ se réduit à l'intégrale $\iiint_V \rho\delta x\delta y\delta z$. Mais c'est là un cas tout à fait particulier.

Considérons par exemple, pour fixer les idées, une aire S dans l'espace et l'ensemble de toutes les molécules qui traversent cette aire S entre un instant t_0 et un instant t_1. Prenons chacune de ces molécules *au moment où elle traverse l'aire* S. Nous avons ici un domaine à trois dimensions de l'univers (x, y, z, t). Les états de ce domaine s'expriment facilement au moyen de trois paramètres α, β, γ : il suffit pour cela d'exprimer les coordonnées d'un point

de S en fonction de deux paramètres α, β et de prendre $t=\gamma$. On aura alors des formules telles que

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha, \beta), \\ y &= g(\alpha, \beta), \\ z &= h(\alpha, \beta), \\ t &= \gamma, \end{aligned}$$

les paramètres α et β prenant toutes les valeurs qui correspondent aux différents points de l'aire S et le paramètre γ prenant toutes les valeurs possibles de l'intervalle (t_0, t_1). L'intégrale de Φ étendue à ce domaine sera évidemment, en ne tenant pas compte du signe,

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta t \left[\iint_{(s)} \rho u \delta y \delta z + \rho v \delta z \delta x + \rho w \delta x \delta y \right].$$

L'intégrale de surface entre crochets représente le *flux de matière* à l'instant t à travers la surface S ; multipliée par δt, elle représente la quantité de matière qui traverse la surface S dans l'intervalle $(t, t+\delta t)$. L'intégrale totale représente donc, comme nous devions nous y attendre, la masse totale qui traverse S dans l'intervalle (t_0, t_1).

38. Des remarques analogues s'appliqueraient à l'invariant intégral double que nous avons rencontré en Hydrodynamique (Chap. II, formule (8))

$$J = \iint \xi \delta y \delta z + \eta \delta z \delta x + \zeta \delta x \delta y + (\eta w - \zeta v) \delta x \delta t + (\zeta u - \xi w) \delta y \delta t + (\xi v - \eta u) \delta z \delta t.$$

Nous avons vu (n° **25**) que cette intégrale, étendue à un ensemble à deux dimensions de molécules prises à un même instant t, représentait le moment ou l'intensité du tube de tourbillon formé des lignes de tourbillon qui partent de ces molécules. Considérons alors l'ensemble des molécules qui traversent un arc de courbe C dans un intervalle de temps (t_0, t_1). Au lieu de prendre ces molécules à un même instant t, prenons chacune d'elles à l'instant où elle traverse l'arc de courbe C. Le moment du tube de tourbillon dont elles font partie à un instant quelconque t sera égal à l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta t \int_{(c)} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \xi & \eta & \zeta \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

CHAPITRE IV.

LE SYSTÈME CARACTÉRISTIQUE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE.

I. — *La classe d'une forme différentielle.*

39. Dans tout ce Chapitre nous considérerons des systèmes d'équations différentielles à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sans distinguer la variable indépendante par une notation spéciale : ce sera l'une quelconque des variables $x_1, \ldots, x_n$. Autrement dit nous considérerons des systèmes d'équations différentielles de la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Un des premiers problèmes qui se posent dans la théorie des invariants intégraux est le suivant : *Reconnaître si une forme différentielle donnée est invariante pour un système d'équations différentielles données, et, plus généralement, déterminer tous les systèmes d'équations différentielles qui admettent une forme différentielle donnée comme forme invariante.*

Avant d'aborder la résolution de ce problème pour les formes différentielles qui se présentent le plus habituellement dans les applications, nous pouvons faire quelques remarques générales qui nous conduiront à un théorème extrêmement important.

Pour qu'une forme Φ puisse être invariante pour le système (1), il faut et il suffit qu'elle puisse s'exprimer au moyen des intégrales premières de (1) et de leurs différentielles. Donc une condition *nécessaire* pour qu'une forme donnée Φ puisse être forme invariante pour un système d'équations différentielles convenablement choisi est que cette forme puisse s'exprimer au moyen de $n - 1$ *quantités au plus* et de leurs différentielles.

40. Supposons alors que la forme donnée Φ puisse s'exprimer au moyen de $r < n$ quantités $y_1, \ldots, y_r$ (fonctions des x_i) et de leurs différentielles ;

supposons en outre qu'*elle ne puisse pas* s'exprimer d'une manière analogue au moyen de *moins de* r quantités. Dans ces conditions nous allons démontrer le théorème suivant :

Pour qu'un système d'équations différentielles admette Φ *comme forme invariante, il faut et il suffit que* $y_1, \ldots, y_r$ *soient intégrales premières de ce système.*

La condition est évidemment suffisante. Pour démontrer qu'elle est nécessaire, considérons un système d'équations différentielles admettant Φ comme forme invariante, et écrivons les équations de ce système en prenant comme nouvelles variables $y_1, \ldots, y_r$ et $n - r$ autres quantités indépendantes $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Soit

$$(2) \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_r}{Y_r} = \frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n}$$

les équations de ce système. Si $y_1, \ldots, y_r$ n'étaient pas toutes des intégrales premières, les r premiers dénominateurs $Y_1, \ldots, Y_r$ ne seraient pas tous nuls ; supposons par exemple $Y_r \neq 0$. On pourrait alors prendre y_r comme variable indépendante et la forme Φ ne changerait pas de valeur si on y remplaçait partout y_r et δy_r par 0, puis

$$y_1, \ldots, y_{r-1}, y_{r+1}, \ldots, y_n$$

par leur valeurs initiales

$$y_1^0, \ldots, y_{r-1}^0, y_{r+1}^0, \ldots, y_n^0$$

regardées comme des intégrales premières du système (2), enfin les différentielles

$$\delta y_1, \ldots, \delta y_n$$

par

$$\delta y_1^0, \ldots, \delta y_n^0.$$

Mais alors, comme Φ ne contient ni $y_{r+1}, \ldots, y_n$, ni leurs différentielles, la nouvelle forme obtenue Ψ ne dépendrait que de $y_1^0, \ldots, y_{r-1}^0$ et de leurs différentielles ; autrement dit on pourrait trouver $r - 1$ fonctions $z_1, \ldots, z_{r-1}$ des x_i, telles que Φ puisse s'exprimer au moyen de ces $r - 1$ fonctions et de leurs différentielles. Ce résultat est contraire à l'hypothèse. Le nombre r sera appelé la *classe* de la forme Φ.

II. — *Le système caractéristique d'une forme différentielle.*

41. Ce théorème extrêmement général comporte des conséquences importantes qui en feront mieux comprendre la portée.

Le système d'équations différentielles le plus général admettant la forme Φ comme forme invariante, écrit avec les variables $y_1, \ldots, y_n$, est, d'après ce qui précède,

$$(3) \qquad \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_r}{0} = \frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n},$$

où $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$ sont des fonctions *arbitraires*. Nous en déduisons immédiatement que toute intégrale première commune à ces systèmes est une fonction de $y_1, \ldots, y_r$. *Si par suite la forme* Φ *peut s'exprimer d'une seconde manière au moyen de* r *quantités* $z_1, \ldots, z_r$ *et de leurs différentielles, les* z_i *seront des fonctions des* y_i *et réciproquement*, puisque les z_i sont des intégrales premières communes à tous les systèmes différentiels qui admettent Φ comme forme invariante. Cela revient à dire qu'*il n'y a essentiellement qu'une manière d'exprimer la forme* Φ *au moyen du nombre minimum de variables et de leurs différentielles*, en ce sens que lorsqu'on a une expression faisant intervenir le nombre minimum r de quantités $y_1, \ldots, y_r$, toutes les autres s'obtiennent en effectuant sur les y un changement de variables arbitraire. — Cette conclusion serait manifestement en défaut si r n'était pas le nombre minimum de variables.

42. Une autre conséquence est la suivante. Convenons de dire qu'un certain nombre, trois par exemple, de systèmes d'équations différentielles à n variables,

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$
$$\frac{dx_1}{X'_1} = \frac{dx_2}{X'_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X'_n},$$
$$\frac{dx_1}{X''_1} = \frac{dx_2}{X''_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X''_n},$$

sont *linéairement indépendants* s'il est impossible de trouver trois coefficients $\lambda, \lambda', \lambda''$ *non tous nuls* tels qu'on ait

$$\lambda X_1 + \lambda' X_1 + \lambda'' X_1 = 0,$$
$$\lambda X_2 + \lambda' X_2 + \lambda'' X_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda X_n + \lambda' X_n + \lambda'' X_n = 0.$$

Nous dirons dans le cas contraire qu'ils sont *linéairement dépendants*.

La propriété de plusieurs systèmes d'être ou non linéairement indépendants subsiste évidemment par un changement quelconque de variables.

Parmi les systèmes (3) qui admettent Φ comme forme invariante, on peut manifestemeut trouver $n - r$ systèmes linéairement indépendants, à savoir ceux qu'on obtient en faisant tous les dénominateurs $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$ nuls *sauf un*. De plus tous les systèmes (3) dépendent linéairement de ces $n - r$ systèmes particuliers.

Nous voyons donc que *si une forme* Φ *est invariante pour* $n - r$ *systèmes d'équations différentielles linéairement indépendants et* $n - r$ *seulement, elle est invariante pour tout système qui en dépend linéairement, et de plus tous ces systèmes ont en commun* r *intégrales premières indépendantes*.

43. Supposons par exemple $n - r = 2$. Il existe deux systèmes d'équations différentielles, soit

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n},$$
$$\frac{dx_1}{X'_1} = \dots = \frac{dx_n}{X'_n},$$

admettant Φ comme forme invariante et tout autre système qui jouit de cette propriété dépend linéairement de ces deux-là. Appelons (C) les trajectoires du premier système, (Γ) celles du second. Menons par un point quelconque M de l'espace à n dimensions la trajectoire (C) et la trajectoire (Γ) qui passent par ce point ; prenons sur (C) un point quelconque P, et sur (Γ) un point quelconque Q ; enfin construisons la trajectoire (Γ′) qui passe par P et la trajectoire (C′) qui passe par Q. *Ces deux nouvelles trajectoires se coupent.* Si en effet $y_1, \dots, y_{n-2}$ sont les intégrales premières communes aux deux systèmes considérés, et si $a_1, \dots, a_{n-2}$ sont les valeurs numériques de ces intégrales au point M, leurs valeurs numériques au point P et au point Q sont encore les mêmes, par suite, les courbes (C), (Γ), (Γ′), (C′) sont toutes situées sur la même variété à deux dimensions

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \dots, y_{n-2} = a_{n-2},$$

donc enfin les deux dernières se coupent.

44. Le cas précédent se présente précisément pour l'invariant intégral double de la théorie des tourbillons, qui correspond à la forme différentielle

$$(4) \quad \Phi = \xi\delta y\delta z + \eta\delta z\delta x + \zeta\delta x\delta y + (\eta w - \zeta v)\delta x\delta t + (\zeta u - \xi w)\delta y\delta t + (\xi v - \eta u)\delta z\delta t.$$

Nous avons vu (n° **24**) que les systèmes d'équations différentielles qui admettent Φ comme forme invariante sont ceux qui entraînent comme conséquence les trois équations

$$(5) \quad \begin{cases} \eta(dz - w dt) - \zeta(dy - v dt) = 0, \\ \zeta(dx - u dt) - \xi(dz - w dt) = 0, \\ \xi(dy - v dt) - \eta(dx - u dt) = 0. \end{cases}$$

Le plus général de ces systèmes peut s'écrire

$$\frac{dx}{\lambda u + \mu\xi} = \frac{dy}{\lambda v + \mu\eta} = \frac{dz}{\lambda w + \mu\zeta} = \frac{dt}{\lambda}$$

et il se déduit linéairement des deux systèmes

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{dt}{1},$$
$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{0},$$

qui définissent les trajectoires des molécules du fluide et les lignes de tourbillon. Les premières sont les courbes (C), les secondes les courbes (Γ) de tout à l'heure et les propriétés obtenues dans le cas général peuvent s'exprimer ici

en disant que *les molécules qui forment une ligne de tourbillon* (Γ) *à l'instant t forment encore une ligne de tourbillon* (Γ') *à l'instant t'*. Le théorème de Helmholtz est ainsi une conséquence très particulière du théorème général démontré au début de ce Chapitre.

45. Nous avons supposé dans les deux numéros précédents $n - r = 2$. Des considérations géométriques analogues pourraient être développées quelles que soient les valeurs de n et de r ; elles reposeraient sur l'existence de variétés définies par r équations de la forme

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \ldots, y_r = a_r$$

et telles que toute trajectoire d'un système différentiel (3) qui y a un de ses points y est contenue tout entière. Chacune de ces variétés, qui est à $n - r$ dimensions, pourrait être obtenue en partant d'un point quelconque M, en menant par ce point une trajectoire d'un quelconque des systèmes qui admettent Φ comme forme invariante, en menant par un point quelconque P de cette trajectoire la trajectoire d'un autre quelconque de ces systèmes et ainsi de suite ; par ces opérations on pourrait engendrer toute la variété à $n - r$ dimensions et on n'en sortirait jamais.

Nous donnerons à ces variétés le nom de *variétés caractéristiques* de la forme Φ.

Les variétés caractéristiques peuvent être regardées comme résultant de l'intégration des équations

$$dy_1 = 0, \ dy_2 = 0, \ldots, dy_r = 0 ;$$

or *ces équations*, si on revient aux variables primitives $x_1, \ldots, x_n$, *sont constituées par l'ensemble des relations linéaires en* $dx_1, \ldots, dx_n$ *qui sont des conséquences des équations d'un quelconque des systèmes différentiels admettant* Φ *comme forme invariante.*

On peut encore dire plus simplement : *La condition nécessaire et suffisante pour que le déplacement élémentaire* ($dx_1, \ldots, dx_n$) *s'effectue dans la direction d'une trajectoire d'un système différentiel admettant* Φ *comme forme invariante se traduit analytiquement par un certain nombre d'équations linéaires en* $dx_1, \ldots, dx_n$. *Ces équations, supposées au nombre de r indépendantes, définissent des variétés à* $n - r$ *dimensions dépendant de r constantes arbitraires telles qu'il en passe une et une seule par tout point de l'espace : ce sont les variétés caractéristiques. Le système d'équations aux différentielles totales linéaires lui-même est appelé le système caractéristique de la forme* Φ.

46. Appelons pour abréger *équation de Pfaff* une équation linéaire en $dx_1, \ldots, dx_n$, et *système de Pfaff* un système d'équations de Pfaff. Un système de r équations de Pfaff à n variables peut toujours être regardé comme définissant r des variables, considérées comme variables dépendantes, en fonction des $m - r$ autres considérées comme variables indépendantes. *En géné-*

ral un tel système est impossible. Un résultat classique est, par exemple, qu'une équation de Pfaff à trois variables

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

où l'on regarde z comme une fonction inconnue de x et de y, n'admet de solution correspondant à des valeurs initiales arbitrairement données que si une certaine condition d'intégrabilité, à savoir

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

est remplie : dans ce cas on dit qu'elle est *complètement intégrable.*

On dit de même qu'un système de Pfaff de r équations à r fonctions inconnues de $n - r$ variables est *complètement intégrable* s'il admet toujours une solution correspondant à des valeurs initiales arbitrairement données des variables. *C'est ce qui se passe pour le système de Pfaff caractéristique d'une forme* Φ.

Le théorème fondamental de ce Chapitre peut donc s'énoncer comme il suit :

Le système de Pfaff caractéristique d'une forme différentielle quelconque Φ *est toujours complètement intégrable.*

47. Revenons une dernière fois à la forme Φ de la théorie des tourbillons. Le système de Pfaff caractéristique de cette forme est défini par les équations (5) ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dx - u\,dt}{\xi} = \frac{dy - v\,dt}{\eta} = \frac{dz - w\,dt}{\zeta};$$

si nous savions exprimer qu'un tel système est complètement intégrable, nous arriverions nécessairement à la traduction analytique du théorème de Helmholtz. Quant aux variétés caractéristiques, elles sont formées par l'ensemble de tous les *états* des molécules qui constituent une même ligne de tourbillon.

Pour l'invariant intégral double de la Dynamique, le système de Pfaff caractéristique se réduit aux équations du mouvement et les variétés caractéristiques aux trajectoires.

Il pourrait en être autrement si, comme nous l'avons fait dans la théorie des tourbillons, on ne considérait qu'une partie des trajectoires, par exemple toutes celles qui satisfont à un même système de relations entre les variables.

CHAPITRE V.

LES SYSTÈMES DE PFAFF INVARIANTS ET LEURS SYSTÈMES CARACTÉRISTIQUES.

I. — *La notion de système de Pfaff invariant.*

48. Au lieu de *formes* invariantes pour un système d'équations différentielles, on peut considérer des *équations* invariantes. H. Poincaré a utilisé en particulier des systèmes d'équations invariantes *finies* : ils jouissent de la propriété que si un point satisfait à un tel système, tous les points qui s'en déduisent par déplacement le long de la trajectoire correspondante satisfont encore à ce système. Pour employer un langage géométrique, *la variété représentée par un système d'équations invariantes est engendrée par des trajectoires.*

On peut aussi considérer des équations différentielles invariantes. Plaçons-nous d'abord, au point de vue restreint, dans le cas simple de deux équations différentielles

(1) $$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y.$$

L'équation

(2) $$\delta y - m(x, y, t)\delta x = 0$$

sera dite *invariante au sens de H. Poincaré* si, étant donnés deux points *simultanés* infiniment voisins quelconques (x, y, t), $(x + \delta x, y + \delta y, t)$ satisfaisant à la relation (2), les points (x', y', t') et $(x' + \delta x', y' + \delta y', t')$ obtenus en les déplaçant le long de leurs trajectoires respectives jusqu'à un autre instant quelconque t' satisfont encore à la relation (2), c'est-à-dire si l'on a encore

$$\delta y' - m(x', y', t')\delta x' = 0.$$

Si l'équation (2) est invariante dans le sens qui vient d'être précisé, elle sera équivalente à l'équation

(3) $$\delta y_0 - m(x_0, y_0, 0)\delta x_0 = 0,$$

où l'on désigne par x_0, y_0 les valeurs initiales de x, y dans la trajectoire qui passe par le point (x, y, t). Si maintenant, dans cette équation (3), on regarde x_0, y_0 comme des fonctions de (x, y, t) et si on y remplace x_0, y_0 par leurs valeurs, cette équation prend évidemment la forme

$$\delta y - \mathrm{Y}\delta t - m(\delta x - \mathrm{X}\delta t) = 0. \tag{4}$$

La nouvelle équation (4), d'après son origine même, a une signification *invariante* au sens complet de ce terme, car elle exprime une propriété *intrinsèque* des deux trajectoires correspondant aux points (x, y, t) et $(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t)$.

Géométriquement l'équation (4) fait correspondre à tout point M (x, y, t) de l'espace un plan (P) passant par ce point. La propriété d'invariance signifie que la droite MM_1 qui joint un point M à un point infiniment voisin M_1 est située dans le plan (P) correspondant au point M, et si l'on déplace M et M_1 le long de leurs trajectoires respectives (en les laissant toujours infiniment voisins l'un de l'autre) jusqu'en M′ et M_1', la droite $\mathrm{M'M}_1'$ est située dans le plan (P′) correspondant au point M′. Il est à remarquer que *le plan* (P) *est tangent à la trajectoire qui passe par le point* M.

D'après ce qui précède il est évident que si une courbe (C) satisfait en chacun de ses points à l'équation (4), c'est-à-dire en est *une courbe intégrale*, la surface engendrée par les trajectoires qui passent par les différents points de (C) est aussi une surface intégrale de l'équation (4). Cela ressort aussi analytiquement de la forme (3) de l'équation (4).

49. Les considérations précédentes se généralisent facilement. Etant donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathrm{X}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

un système d'équations de Pfaff

$$\begin{cases} a_{11}\delta x_1 + \ldots + a_{1n}\delta x_n + a_1\delta t = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{h1}\delta x_1 + \ldots + a_{hn}\delta x_n + a_h\delta t = 0 \end{cases} \tag{6}$$

sera dit invariant pour le système (5) si les équations (6) peuvent s'exprimer uniquement au moyen des intégrales premières de (5) et de leurs différentielles, par exemple sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}^0\delta x_1^0 + \ldots + a_{1n}^0\delta x_n^0 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{h1}^0\delta x_0 + \ldots + a_{hn}^0\delta x_n^0 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Cela exige d'abord que les équations (6) soient identiquement vérifiées quand on y remplace δx_i par $\mathrm{X}_i\delta t$; mais cette condition n'est évidemment pas suffisante. Quoi qu'il en soit, si le système de Pfaff (6) est invariant, il jouit d'une propriété géométrique importante, c'est que *étant donnée une variété*

intégrale quelconque du système (6), *la variété obtenue en menant par chaque point de la variété donnée la trajectoire correspondante des équations* (5) *est encore intégrale*; cela résulte en effet de ce que si l'on se déplace sur cette nouvelle variété, en un point quelconque, les équations (7) ne cessent pas d'être vérifiées.

(Il est entendu qu'on appelle variété intégrale une variété telle que si l'on se déplace *sur cette variété* dans une direction quelconque ($\delta x_1, \ldots, \delta t$) les équations (6) sont vérifiées).

De là résulte que *toute variété intégrale du système de Pfaff invariant* (6) *jouit de la propriété, ou bien d'être engendrée par des trajectoires des équations données* (5), *ou bien de faire partie d'une variété intégrale à un plus grand nombre de dimensions engendrée elle-même par des trajectoires.*

II. — *Le système caractéristique d'un système de Pfaff.*

50. Etant donné un système de Pfaff quelconque à n variables ($x_1, \ldots, x_n$)

$$(8)\qquad \begin{cases} a_{11}\delta x_1 + \ldots + a_{1n}\delta x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}\delta x_1 + \ldots + a_{hn}\delta x_n = 0, \end{cases}$$

on peut se proposer de déterminer tous les systèmes d'équations différentielles

$$(9)\qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

pour lesquels le système (8) est invariant. C'est un problème que nous résoudrons plus loin, mais sans le résoudre on peut démontrer à l'égard de tous ces systèmes un théorème important, identique du reste à celui qui a été démontré dans le Chapitre précédent à propos d'une forme différentielle donnée.

Supposons que les équations données (8) puissent s'écrire au moyen de r quantités $y_1, \ldots, y_r$, fonctions des x et de leurs différentielles, sous la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} b_{11}(y)\delta y_1 + \ldots + b_{1r}(y)\delta y_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{h1}(y)\delta y_1 + \ldots + b_{hr}(y)\delta y_r = 0, \end{cases}$$

et supposons de plus qu'elles ne puissent pas s'écrire au moyen de moins de r quantités et de leurs différentielles. Le nombre r s'appellera la *classe* du système. *La condition nécessaire et suffisante pour que le système de Pfaff* (8) *soit invariant pour les équations* (9) *est que ces équations* (9) *admettent* $y_1, y_2, \ldots, y_r$ *comme intégrales premières.*

La démonstration est exactement la même que dans le Chapitre précédent et les conséquences qu'on en tire sont aussi les mêmes. En particulier les équations qui expriment que le système de Pfaff donné (8) est invariant pour le système d'équations différentielles (9) se réduisent à r équations linéaires

en $X_1, \ldots, X_n$, ou, ce qui revient au même, à r équations linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$, et ces r équations forment un système de Pfaff équivalent à

$$dy_1 = 0, \ldots, dy_r = 0,$$

c'est-à-dire *complètement intégrable*. Ce système de Pfaff s'appelle *le système caractéristique* du système de Pfaff donné (8) ; les équations du système caractéristique peuvent du reste s'obtenir en ajoutant aux h équations (8) du système donné $r - h$ autres équations.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de Pfaff (8) *soit complètement intégrable est évidemment qu'il coïncide avec son système caractéristique*, de sorte que si on sait former le système caractéristique d'un système de Pfaff quelconque, on saura par cela même exprimer qu'il est complètement intégrable.

51. Il est évident qu'un systeme de Pfaff (8) peut être regardé comme invariant pour son système caractéristique ; *toute variété intégrale du système* (8) *ou bien est engendrée par des variétés caractéristiques, ou bien fait partie d'une variété intégrale à un plus grand nombre de dimensions engendrée elle-même par des variétés caractéristiques*.

Si l'on considère une forme différentielle quelconque, et si cette forme est invariante pour un certain système d'équations différentielles, le système de Pfaff caractéristique de la forme est invariant pour ce même système d'équations différentielles.

C'est ainsi qu'en Hydrodynamique le système de Pfaff

$$\frac{\delta x - u\delta t}{\xi} = \frac{\delta y - v\delta t}{\eta} = \frac{\delta z - w\delta t}{\zeta}$$

est invariant pour les équations différentielles des trajectoires des molécules fluides (comme aussi pour les équations différentielles des lignes de tourbillon).

Tous ces théorèmes, et d'autres qu'on pourrait facilement imaginer, sont des conséquences immédiates de la propriété caractéristique d'un système invariant de ne faire intervenir que les intégrales premières des équations différentielles pour lesquelles il est invariant.

52. Considérons, soit une forme différentielle, soit un système de Pfaff, soit même l'ensemble de plusieurs formes différentielles et d'un système de Pfaff, et désignons par $y_1, \ldots, y_r$ les intégrales premières du système de Pfaff caractéristique, soit de la forme différentielle donnée, soit du système de Pfaff donné, etc. Il est évident que *si l'on porte son attention uniquement sur la manière dont figurent les différentielles* $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ dans la forme différentielle, ou dans le système de Pfaff etc., sans se préoccuper des coefficients, *ces différentielles entrent dans les seules combinaisons* $\delta y_1, \ldots, \delta y_r$. Mais il se peut aussi qu'elles n'entrent que par des combinaisons linéaires en nombre inférieur à r. En tous les cas si l'on connaît les combinaisons linéaires en nombre minimum

des δx_i au moyen desquelles peut s'exprimer la forme (ou le système de Pfaff, etc.) *les équations obtenues en annulant ces combinaisons linéaires font partie du système caractéristique*.

III. — *Le rang d'une forme algébrique et son système associé.*

53. Les considérations qui précèdent gagneront en netteté si nous démontrons, à l'égard des formes algébriques, un théorème analogue à celui qui nous a conduits à la notion de système caractéristique :

Si une forme algébrique à n variables $u_1, \ldots, u_n$ peut s'exprimer au moyen de r combinaisons linéaires indépendantes $v_1, \ldots, v_r$ des variables sans pouvoir s'exprimer au moyen d'un moindre nombre, si de plus on a trouvé une autre expression de la forme au moyen de r autres combinaisons linéaires $w_1, \ldots, w_r$ des variables, les w_i sont des combinaisons linéaires indépendantes des v_i.

En effet considérons les $2r$ formes linéaires

$$v_1, \ldots, v_r; \quad w_1, \ldots, w_r,$$

des variables données. Supposons que parmi ces formes il y en ait $2r - \rho$ indépendantes ($0 \leqslant \rho \leqslant r$); cela revient à dire qu'il existe ρ combinaisons linéaires indépendantes des v qui sont en même temps combinaisons linéaires des w; appelons les $t_1, \ldots, t_\rho$. Supposons encore, ce qui est permis, que $t_1, \ldots, t_\rho$ sont des combinaisons linéaires indépendantes à la fois de $v_1, \ldots, v_\rho$ et de $w_1, \ldots, w_\rho$. On a alors une double égalité de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(t_1, \ldots, t_\rho; \; v_{\rho+1}, \ldots, v_r) = \Psi(t_1, \ldots, t_\rho; \; w_{\rho+1}, \ldots, w_r).$$

Les quantités $t_1, \ldots, t_\rho, v_{\rho+1}, \ldots, v_r, w_{\rho+1}, \ldots, w_r$ étant indépendantes, cela n'est possible que si Φ par exemple ne dépend pas de $v_{\rho+1}, \ldots, v_r$. Cela n'est compatible avec l'hypothèse que si $\rho = r$, et alors le théorème est démontré.

Le système d'équations linéaires

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_r = 0$$

sera appelé le système *associé* de la forme donnée. La notion de système associé s'étend évidemment à un ensemble de formes, ou encore à un système d'équations algébriques. Nous dirons que l'entier r est le *rang* de la forme.

D'après cela le système *caractéristique* d'une forme différentielle contient toujours le système *associé* de cette forme, considérée comme forme algébrique en $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$. *Mais il peut contenir d'autres équations que celles du système associé.*

CHAPITRE VI.

—

LES FORMES A MULTIPLICATION EXTÉRIEURE.

I. — *Le système associé d'une forme quadratique.*

54. Nous n'avons qu'un mot à dire des formes algébriques ordinaires, formes quadratiques, cubiques, etc.

Une forme quadratique

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{i,j}^{1,\dots,n} a_{ij}u_i u_j = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + \dots + 2a_{12}u_1u_2 + \dots$$

est, comme on sait, réductible à une somme de carrés; ces carrés sont au nombre de n indépendants si le discriminant de la forme est différent de zéro. Nous nous proposons de déterminer le nombre minimum de variables au moyen desquelles (par une substitution linéaire convenable) peut s'exprimer la forme. Il suffit, pour obtenir ces variables, de considérer le système d'équations linéaires

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n} = 0.$$

Il est d'abord évident que ce système est indépendant du choix des variables. Supposons qu'il se réduise à r équations indépendantes, qu'on peut toujours supposer être

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \dots, x_r = 0.$$

Cela posé *la forme F peut s'exprimer au moyen des r variables $x_1, \dots, x_r$ et ne peut pas s'exprimer au moyen de moins de r variables.*

Exprimons en effet F au moyen de $x_1, \dots, x_r$ et de $n - r$ autres formes indépendantes $x_{r+1}, \dots, x_n$: la variable x_{r+1} par exemple n'entrera pas dans F, car, si elle y entrait par un terme tel que $Ax_{r+1}\, x_\alpha$, l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = 0$$

contiendrait x_{r+1}, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Réciproquement supposons que la forme F puisse s'exprimer au moyen de $\rho \leqq r$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_\rho$; le système (2) formé en partant de variables $y_1, \ldots, y_\rho, \ldots, y_n$, ne contiendrait manifestement que les variables $y_1, \ldots, y_\rho$; il faut donc $\rho = r$ et le système (2) se réduirait alors à

$$y_1 = y_2 = = \ldots y_r = 0 ;$$

les $y_1, \ldots, y_r$ sont donc des combinaisons linéaires indépendantes de $x_1, \ldots, x_r$.

La dernière partie de la démonstration montre, ce que nous savions déjà, que l'expression de F au moyen du nombre minimum de variables n'est *essentiellement* possible que d'une manière, à une substitution linéaire près sur ces variables en nombre minimum.

Le système (2) est le système *associé* de la forme F.

Ce qui précède s'étend à une forme entière et homogène de degré quelconque. Si par exemple F est une forme cubique, le système d'équations linéaires associé sera obtenu en annulant toutes les dérivées *secondes* de F

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} = 0 ;$$

ce système donne les variables en nombre minimum au moyen desquelles peut s'exprimer F.

II. — *Les formes bilinéaires alternées et les formes quadratiques extérieures.*

55. Les formes dont nous allons maintenant nous occuper sont celles qui interviennent sous un signe d'intégrale multiple quand on y considère les différentielles comme des variables. Ce sont des formes qui ont des règles de calcul spéciales sur lesquelles il n'est pas inutile d'insister.

Partons d'une forme bilinéaire

$$f(u, v) = \sum a_{ij} u_i v_j$$

à deux séries de variables

$$u_1, \ldots, u_n ; \qquad v_1, \ldots, v_n.$$

Une telle forme est dite *symétrique* si elle se conserve quand on échange les deux séries de variables :

$$f(v, u) = f(u, v),$$

et *alternée* si elle se conserve *avec changement de signe* dans les mêmes conditions :

$$f(v, u) = - f(u, v).$$

Les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients pour que la forme soit symétrique sont

$$a_{ij} = a_{ji} ;$$

les conditions pour qu'elle soit alternée sont

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, \qquad a_{ii} = 0.$$

Si on soumet les deux séries de variables u_i et v_i à une *même* substitution linéaire, la forme $f(u, v)$ se change dans une nouvelle forme bilinéaire $F(U, V)$ des nouvelles variables U_i, V_i, et il est évident que la forme $F(U, V)$ est encore symétrique si f l'était, alternée si f l'était : cela tient à ce que l'échange des deux séries de variables nouvelles U et V revient à l'échange des deux séries de variables primitives u et v.

A toute fonction bilinéaire symétrique $f(u, v)$ on peut faire correspondre une forme quadratique, à savoir $f(u, u)$, et la correspondance est réciproque. Si l'on pose

$$f(u, u) = F(u),$$

on a

$$f(u, v) = \frac{1}{2}\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots + v_n \frac{\partial F}{\partial u_n}\right).$$

Une correspondance analogue ne peut plus s'établir pour les formes alternées, car $f(u, u)$ dans ce cas devient identiquement nulle. C'est à cet inconvénient qu'on peut obvier de la manière suivante.

56. Remarquons d'abord que, dans une forme bilinéaire alternée, les coefficients des termes $u_i v_i$ sont tous nuls et que les coefficients des termes $u_i v_j$ et $u_j v_i$ sont opposés. On peut alors écrire

$$f(u, v) = \sum_{(ij)} a_{ij}(u_i v_j - u_j v_i),$$

la somme du second membre étant étendue à toutes les *combinaisons* des n indices deux à deux, de sorte qu'il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ termes dans ce second membre. L'expression $u_i v_j - u_j v_i$ n'étant autre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix},$$

on peut, *par une convention d'écriture*, la désigner par la notation

$$u_i v_j - u_j v_i = [u_i\, u_j],$$

en écrivant l'un à la suite de l'autre les deux éléments de la première ligne et en la mettant entre crochets. Avec cette notation, on a

$$f(u, v) = \sum a_{ij}[u_i\, u_j].$$

Convenons de même de désigner par la notation $[f(u)\, f'(u)]$ la forme bilinéaire alternée définie par le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(u) & f'(u) \\ f(v) & f'(v) \end{vmatrix}$$

où f et f' désignent deux formes linéaires quelconques

$$f(u) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n,$$
$$f'(u) = a'_1 u_1 + a'_2 u_2 + \ldots + a'_n u_n.$$

Si on développe le déterminant précédent, on trouve immédiatement

$$[f(u) f'(u)] = \begin{vmatrix} f(u) & f'(u) \\ f(v) & f'(v) \end{vmatrix} = \sum_i \sum_j a_i a'_j \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} = \sum_i \sum_j a_i a'_j [u_i \; u_j].$$

La comparaison du premier et du dernier membre montre que *le développement de $[f(u) f'(u)]$ peut s'obtenir en regardant cette expression comme un produit, en développant ce produit suivant les règles ordinaires de l'algèbre, mais en ayant soin de ne pas changer l'ordre des facteurs dans les produits partiels et de convenir que tout produit partiel qui contient deux variables identiques est nul et que tout produit partiel de deux variables différentes change de signe quand on change l'ordre des facteurs.*

La multiplication dont les règles viennent d'être énoncées est due à H. Grassmann qui lui a donné le nom de *multiplication extérieure.*

En utilisant cette opération, on voit qu'*on peut faire correspondre à toute forme bilinéaire alternée une forme du second degré à une seule série de variables, mais à multiplication extérieure, et réciproquement à toute forme quadratique à multiplication extérieure correspond une forme bilinéaire alternée.*

Nous dirons pour abréger « forme extérieure » au lieu de « forme à multiplication extérieure ».

57. Si dans une forme extérieure $F(u)$ on effectue sur les variables une substitution linéaire, la nouvelle forme s'obtient simplement en développant chaque produit partiel $[u_i \; u_j]$ en fonction des nouvelles variables.

La dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial u_1}$ d'une forme quadratique extérieure se définira simplement comme la somme des dérivées partielles de ses termes; un terme qui ne contient pas u_1 aura naturellement une dérivée nulle; quant à un terme qui contient u_1, on pourra toujours supposer u_1 amené à la première place dans le produit partiel; la dérivée de $A[u_1 \; u_i]$ sera alors Au_i. On a par exemple

$$\frac{\partial [u_1 u_2]}{\partial u_1} = u_2, \qquad \frac{\partial [u_1 u_2]}{\partial u_2} = -u_1, \qquad \frac{\partial [u_1 u_2]}{\partial u_3} = 0, \; \ldots, \; \frac{\partial [u_1 u_2]}{\partial u_n} = 0.$$

Avec ces conventions on a

$$2F(u) = \left[u_1 \frac{\partial F}{\partial u_1}\right] + \left[u_2 \frac{\partial F}{\partial u_2}\right] + \ldots + \left[u_n \frac{\partial F}{\partial u_n}\right],$$

où les produits partiels du second membre sont des produits extérieurs.

Si $F(u)$ correspond à la forme alternée $f(u, v)$, on a manifestement

$$f(u, v) = -\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots + v_n \frac{\partial F}{\partial u_n}\right),$$

où les produits partiels se font suivant les règles de la multiplication ordinaire.

Remarquons enfin que si l'on effectue sur les u_i une substitution linéaire

$$u_i = h_{i1}U_1 + \dots + h_{in}U_n \qquad (i = 1, \dots, n)$$

et si $F(u)$ devient par cette substitution $\Phi(U)$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U_k} = h_{1k}\frac{\partial F}{\partial u_1} + h_{2k}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots + h_{nk}\frac{\partial F}{\partial u_n},$$

comme si F était une forme algébrique ordinaire.

58. Le système d'équations linéaires

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n} = 0,$$

où F est une forme quadratique extérieure donnée, est évidemment indépendant du choix des variables. On peut donc supposer qu'il se réduise aux équations

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \dots, u_r = 0 \qquad (r \leq n).$$

S'il en est ainsi *la forme* F *ne dépend pas de* $u_{r+1}, \dots, u_n$; si en effet elle contenait un terme tel que $A[u_{r+1}u_\alpha]$, l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial u_\alpha} = 0$$

ne serait pas une conséquence des équations (3). La forme F peut donc s'exprimer uniquement au moyen des premiers membres des équations (3).

Réciproquement supposons que la forme F puisse s'exprimer au moyen de $\rho < r$ variables $v_1, v_2, \dots, v_\rho$. Les premiers membres des équations du système

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial v_n} = 0$$

ne dépendraient que de $v_1, \dots, v_\rho$; ce système contiendrait donc ρ équations indépendantes au plus. Par suite on a $\rho = r$ et les v_i sont des combinaisons linéaires des u_i.

Le système associé d'une forme quadratique extérieure s'obtient donc en annulant toutes ses dérivées partielles du premier ordre.

59. Ce résultat peut être précisé; nous allons montrer que *le rang r est nécessairement pair*, et trouver en même temps pour les formes quadratiques extérieures une forme réduite jouant le même rôle que les sommes de carrés pour les formes quadratiques ordinaires.

Supposons pour fixer les idées que le coefficient a_{12} de $F(u)$ ne soit pas nul, et considérons la forme

$$\frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}\right] = \frac{1}{a_{12}}\left[(a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \dots + a_{1n}u_n)(a_{21}u_1 + a_{23}u_3 + \dots + a_{2n}u_n)\right];$$

cette forme a les mêmes coefficients que F pour les termes en

$$[u_1u_2],\ [u_1u_3],\ \ldots,\ [u_1u_n],\ [u_2u_3],\ \ldots,\ [u_2u_n],$$

c'est-à-dire pour les termes qui contiennent l'une au moins des variables u_1 et u_2. Par suite la forme

$$F(u) - \frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}\right] = F'(u)$$

ne contient plus que les variables $u_3, u_4, \ldots, u_n$. Supposons alors que le coefficient a'_{34} de cette forme ne soit pas nul ; on verra de même que la forme

$$F'(u) - \frac{1}{a'_{34}}\left[\frac{\partial F'}{\partial u_3}\frac{\partial F'}{\partial u_4}\right] = F''(u)$$

ne contient plus que les variables $u_5, u_6, \ldots, u_n$. On peut continuer ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on arrive à une forme identiquement nulle. Supposons par exemple qu'on ait

$$F(u) = \frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}\right] + \frac{1}{a'_{34}}\left[\frac{\partial F'}{\partial u_3}\frac{\partial F'}{\partial u_4}\right] + \frac{1}{a''_{56}}\left[\frac{\partial F''}{\partial u_5}\frac{\partial F''}{\partial u_6}\right].$$

Les six formes linéaires

$$\frac{\partial F}{\partial u_1},\quad \frac{\partial F}{\partial u_2},\quad \frac{\partial F'}{\partial u_3},\quad \frac{\partial F'}{\partial u_4},\quad \frac{\partial F''}{\partial u_5},\quad \frac{\partial F''}{\partial u_6}$$

sont manifestement indépendantes. En posant

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = U_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial u_2} = a_{12}U_2,$$
$$\frac{\partial F'}{\partial u_3} = U_3, \qquad \frac{\partial F'}{\partial u_4} = a'_{34}U_4,$$
$$\frac{\partial F''}{\partial u_5} = U_5, \qquad \frac{\partial F''}{\partial u_6} = a''_{56}U_6,$$

la forme F se réduit à la forme canonique cherchée

$$F(U) = [U_1U_2] + [U_3U_4] + [U_5U_6].$$

Le raisonnement est évidemment général et conduit à la forme canonique

$$F(U) = [U_1U_2] + \ldots + [U_{2s-1}U_{2s}] \qquad (2s \leqslant n).$$

Le système associé est évidemment

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_{2s} = 0.$$

Ce résultat aura plus loin une très grande importance.

60. La réduction d'une forme quadratique extérieure à sa forme canonique est évidemment possible d'une infinité de manières ; l'ensemble des substitutions linéaires qui font passer d'une forme canonique à une autre constitue un groupe important qui dépend de $s(2s+1)$ paramètres arbitraires. Si $s = 1$ ces substitutions à deux variables sont caractérisées par la condition d'avoir leur déterminant égal à l'unité.

III. — *Les formes extérieures de degré supérieur à deux.*

61. On peut imaginer des formes extérieures d'un degré quelconque. On y arrive le plus naturellement en partant d'une forme linéaire à p séries de variables $u_i, v_i, \ldots, w_i$

$$f(u, v, \ldots, w)$$

satisfaisant à la condition que l'échange de deux séries de variables entre elles reproduise la forme, mais changée de signe. Dans le cas $p = 3$ par exemple cette hypothèse entraîne comme conséquence que tout terme où le même indice entre deux fois a son coefficient nul et que l'ensemble des termes où entrent trois indices distincts, par exemple 1, 2, 3, est de la forme

$$a_{123}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

La même convention d'écriture que ci-dessus conduit à une loi de multiplication distributive, mais *non commutative*, chaque produit partiel changeant de signe si on échange entre elles deux des variables qui y entrent. On aura par conséquent

$$[u_1u_2u_3] = -[u_2u_1u_3] = -[u_1u_3u_2] = -[u_3u_2u_1] = [u_2u_3u_1] = [u_3u_1u_2].$$

On pourra d'après cela définir un produit extérieur tel que

$$[F\Phi\Psi],$$

où F, Φ, Ψ sont des formes extérieures de degrés quelconques ; le degré du produit est la somme des degrés des facteurs. Le produit est nécessairement nul si la somme des degrés dépasse n. On constate facilement que si l'on échange entre eux deux facteurs du produit, le produit ne change pas si l'un au moins de ces facteurs est de degré pair, et il se reproduit changé de signe s'ils sont tous deux de degré impair. On définira de même une somme de produits de cette nature.

En particulier le produit d'une forme par elle-même est nul si cette forme est de degré impair, mais il n'est pas nécessairement nul si elle de degré pair. Prenons par exemple une forme quadratique F réduite à sa forme canonique

$$F = [u_1u_2] + [u_3u_4] + \ldots + [u_{2s-1}u_{2s}];$$

on a

$$\frac{1}{2}[F^2] = [u_1u_2u_3u_4] + [u_1u_2u_5u_6] + \ldots + [u_{2s-3}u_{2s-2}u_{2s-1}u_{2s}],$$

$$\frac{1}{3!}[F^3] = [u_1u_2u_3u_4u_5u_6] + \ldots,$$

$$\frac{1}{s!}[F^s] = [u_1u_2u_3u_4 \ldots u_{2s-1}u_{2s}],$$

$$\frac{1}{(s+1)!}[F^{s+1}] = 0.$$

Le rang $2s$ d'une forme quadratique F est donc le double du plus grand exposant de la puissance à laquelle on peut élever F sans qu'elle s'annule.

Une application simple à la théorie des déterminants est la suivante. Soit

$$F = a_{12}[u_1u_2] + a_{13}[u_1u_3] + a_{14}[u_1u_4] + a_{23}[u_2u_3] + a_{24}[u_2u_4] + a_{34}[u_3u_4]$$

une forme à quatre variables ; on a

$$\frac{1}{2}[F^2] = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})[u_1u_2u_3u_4] ;$$

d'autre part le système associé de F est

$$\begin{array}{rrrrl} & a_{12}u_2 & + a_{13}u_3 & + a_{14}u_4 & = 0, \\ a_{21}u_1 & & + a_{23}u_3 & + a_{24}u_4 & = 0, \\ a_{31}u_1 & + a_{32}u_2 & + & + a_{34}u_4 & = 0, \\ a_{41}u_1 & + a_{42}u_2 & + a_{43}u_3 & & = 0. \end{array}$$

La condition pour que la forme puisse s'exprimer au moyen de moins de quatre variables est d'une part qu'on ait $[F^2] = 0$, c'est-à-dire

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0,$$

d'autre part que le déterminant du système associé soit nul, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces deux équations sont équivalentes, malgré les apparences ; on démontre en effet que le déterminant, qui est symétrique gauche de degré pair, est le carré de l'expression

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}.$$

62. Toute forme extérieure de degré n (égal au nombre des variables) est de la forme

$$A[u_1u_2 \ldots u_n].$$

On peut obtenir des formes canoniques lorsque le degré est $n - 1$ ou $n - 2$. On y arrive facilement par la notion de *forme adjointe* d'une forme donnée.

Considérons une forme F de degré p et désignons par $\xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-p-1)}$ des formes linéaires à coefficients indéterminés

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n, \\ \xi' &= \xi'_1 u_1 + \ldots + \xi'_n u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Le produit extérieur $[F\xi\xi' \ldots \xi^{(n-p-1)}]$ est de degré n et par suite de la forme

$$\Phi[u_1u_2 \ldots u_n] ;$$

le coefficient Φ est linéaire par rapport à chaque série de coefficients ξ, de plus il est *alterné*; il lui correspond donc une forme extérieure de degré $n - p$ aux variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$: c'est par définition la forme adjointe de F.

Si l'on effectue une substitution linéaire sur les u et si l'on effectue en même temps sur les ξ une substitution linéaire qui conserve l'expression $\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n$, l'expression $\Phi[u_1 \ldots u_n]$ se conserve évidemment; autrement dit *la forme adjointe se reproduit multipliée par le déterminant de la substitution effectuée sur les variables u.*

La forme adjointe d'une forme $F = F_1 + F_2$ est évidemment la somme des formes adjointes Φ_1 et Φ_2. De même la forme adjointe de aF, où a est un coefficient numérique, est $a\Phi$. D'après cela il suffit, pour calculer la forme adjointe d'une forme quelconque, de savoir calculer la forme adjointe d'une forme monôme telle que

$$F = [u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_p}].$$

En appliquant la définition donnée, on trouve

$$\Phi = [\xi_{\alpha_{p+1}} \ldots \xi_{\alpha_n}],$$

les indices $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ étant ceux des indices $1, 2, \ldots, n$ qui ne figurent pas dans la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; ces indices sont supposés rangés dans un ordre tel que la suite totale

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$$

soit paire.

63. Supposons d'après cela que F soit une forme de degré $n - 1$; la forme adjointe sera du premier degré; on pourra donc la supposer réduite à ξ_n par exemple, de sorte que F *peut toujours se ramener à avoir l'expression*

$$F = [u_1 u_2 \ldots u_{n-1}].$$

Supposons maintenant F de degré $n - 2$; la forme Φ sera du second degré; on pourra donc toujours la supposer donnée par la formule

$$\Phi = [\xi_1 \xi_2] + \ldots + [\xi_{2s-1} \xi_{2s}];$$

par suite on aura

$$F = [u_3 u_4 u_5 \ldots u_n] + [u_1 u_2 u_5 u_6 \ldots u_n] + \ldots + [u_1 u_2 \ldots u_{2s-2} u_{2s+1} \ldots u_n].$$

Si $s = 1$, F se réduit à une forme monôme.

Par exemple si $n = 5$, toute forme F de degré $5 - 2 = 3$ est réductible à l'une des formes canoniques

$$F = [u_3 u_4 u_5],$$
$$F = [u_1 u_2 u_5] + [u_3 u_4 u_5];$$

si $n = 6$ toute forme F de degré 4 est réductible à l'une des formes

$$F = [u_3 u_4 u_5 u_6],$$
$$F = [u_3 u_4 u_5 u_6] + [u_1 u_2 u_5 u_6] = [([u_1 u_2] + [u_3 u_4]) u_5 u_6],$$
$$F = [u_3 u_4 u_5 u_6] + [u_1 u_2 u_5 u_6] + [u_1 u_2 u_3 u_4] = \frac{1}{2} [[u_1 u_2] + [u_3 u_4] + [u_5 u_6]]^2,$$

La notion de forme adjointe permettrait de définir le produit de deux formes dont la somme des degrés dépasse n : c'est l'opération appelée par H. Grassmann *multiplication extérieure régressive*, mais nous ne l'utiliserons pas.

64. Signalons encore quelques applications de la multiplication extérieure. Supposons que $f_1, f_2, \ldots, f_h$ soient h formes linéaires *indépendantes*. *L'équation*

$$[\mathrm{F}f_1f_2 \cdots f_h] = 0,$$

où F *est une forme extérieure quelconque, donne la condition nécessaire et suffisante pour que* F *s'annule lorsqu'on établit entre les variables les relations*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_h = 0.$$

En effet on peut d'abord se ramener au cas où l'on a $f_i = u_i$. Si alors tout terme de F contient l'une au moins des variables $u_1, \ldots, u_h$, il est évident que le produit $[\mathrm{F}u_1 \ldots u_h]$ est nul. Réciproquement si ce produit est nul, un terme quelconque de F contient en facteur l'une au moins des variables $u_1, \ldots, u_h$, sinon en effet la multiplication de ce terme par $[u_1 \ldots u_h]$ donnerait un produit non nul, qui ne pourrait se réduire avec aucun autre.

IV. — *Le système associé d'une forme extérieure*.

65. La détermination du système associé se fait aussi facilement pour une forme extérieure de degré quelconque que pour une forme quadratique. Si la forme est de degré p, le système associé s'obtient en effet en annulant toutes les dérivées partielles de F d'ordre $p - 1$. On définira une dérivée du premier ordre telle que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}$ comme le coefficient de u_1 dans l'ensemble des termes de F qui contiennent cette variable, en prenant préalablement la précaution de faire passer u_1 au premier rang dans chacun de ces termes. Il est à remarquer que cette dérivée $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}$ ne dépend plus de u_1. La dérivée $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u_1 \partial u_2}$ sera par définition la dérivée par rapport à u_2 de $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}$: on l'obtient par suite en prenant l'ensemble des termes de F qui contiennent à la fois les deux variables u_1 et u_2, en faisant passer dans chacun de ces termes la variable u_1 au premier rang et la variable u_2 au deuxième, et en supprimant enfin dans tous ces termes les deux variables u_1 et u_2. On a d'après cela

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u_2 \partial u_1}.$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur se définissent de la même manière : elles sont nécessairement prises par rapport à des variables toutes différentes.

Le rang d'une forme non identiquement nulle de degré n est évidemment égal à n. Le rang d'une forme de degré $n - 1$ est égal à $n - 1$. Le rang d'une

forme de degré $n-2$ est égal à $n-2$, si elle est réductible à une forme monôme, à n dans tous les autres cas. Si le degré est inférieur à $n-2$, on ne peut rien dire *a priori* sur le rang.

V. — *Formules relatives aux formes quadratiques extérieures.*

66. Revenons au cas d'une forme quadratique extérieure F à n variables $u_1, u_2, \dots, u_n$. Il peut arriver qu'on suppose les variables liées par une relation linéaire

$$f \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0.$$

La forme F, où on supposerait par exemple u_n exprimée en fonction de $u_1, \dots, u_{n-1}$ au moyen de la relation donnée, aurait un certain rang, correspondant au nombre d'équations linéairement indépendantes de son système associé. Ce dernier a évidemment pour équations

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{a_1}{a_n}\frac{\partial F}{\partial u_n} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{\partial F}{\partial u_n} = 0, \quad f = 0,$$

ou encore

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u_1}}{a_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial u_2}}{a_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial u_n}}{a_n}, \quad f = 0.$$

Plus généralement on pourrait supposer les variables liées par un nombre quelconque de relations

$$\begin{aligned} f &\equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0, \\ g &\equiv b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h &\equiv l_1 u_1 + l_2 u_2 + \dots + l_n u_n = 0. \end{aligned}$$

Le système associé de F serait alors défini par les formules

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial u_1} & \frac{\partial F}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F}{\partial u_n} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{matrix} \right\| = 0, \quad f = 0, \quad g = 0, \dots, h = 0;$$

égaler à zéro la matrice qui vient d'être écrite signifie annuler tous les déterminants formés avec les lignes de cette matrice et le même nombre de colonnes.

On peut remarquer que *le rang $2s'$ de la forme F, quand on suppose les variables liées par les relations données, est le double du plus grand exposant tel que la forme*

$$[fg \dots hF^{s'}]$$

ne soit pas nulle.

67. Supposons en particulier que $n = 2s$ et que la forme F soit de rang n. Si on lie les variables par une seule relation, il est évident que le rang de la forme ne peut pas dépasser $n - 1 = 2s - 1$ et, *comme ce rang est pair*, il est au plus égal à $2s - 2$. Il est du reste facile de voir qu'il ne peut pas descendre au-dessous de cette limite.

Il résulte de là que si on lie les variables par p relations linéaires indépendantes, le rang de F diminuera *au plus* de $2p$ unités. Cherchons dans quel cas la diminution maxima sera atteinte. Si les relations sont

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_p = 0,$$

il faudra et il suffira qu'on ait

$$(4) \qquad [f_1 f_2 \ldots f_p \mathrm{F}^{s-p+1}] = 0.$$

Cette condition peut être remplacée par d'autres conditions plus simples. Remarquons en effet que si l'on prend deux quelconques des p relations données, ces deux relations diminuent nécessairement le rang de F de 4 unités; on a donc

$$(5) \qquad [f_i f_j \mathrm{F}^{s-1}] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p).$$

Nous allons démontrer que *ces* $\frac{p(p-1)}{2}$ *équations nécessaires sont aussi suffisantes.*

Supposons en effet ces conditions remplies et faisons un changement de variables de manière à ramener f_i à u_i. On aura donc

$$[u_i u_j \mathrm{F}^{s-1}] = 0,$$

ce qui montre que, *dans la forme* $\Phi(\xi)$ *adjointe de* $\mathrm{F}^{s-1}(u)$, il n'y a pas de terme en $[\xi_i \xi_j]$. Or la forme adjointe de F^{s-q} est Φ^q : cela se reconnaît facilement en supposant F réduite à sa forme canonique. Par suite chaque terme de la forme adjointe de F^{s-p+1}, qui est Φ^{p-1}, contient *au moins* $p - 1$ des variables $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$, puisque chaque terme de Φ contient au moins l'une de ces variables. Chacun des termes de Φ^{p-1} contient donc *au plus* $p - 1$ des variables $\xi_1, \ldots, \xi_p$. Par suite la forme adjointe de Φ^{p-1} contient *au moins* l'une des variables $u_1, \ldots, u_p$. Cela revient à dire qu'on a

$$[u_1 u_2 \ldots u_p \mathrm{F}^{s-p+1}] = 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

L'intérêt du théorème précédent est facile à mettre en évidence. Les formes $[f_i f_j \mathrm{F}^{s-1}]$ étant de degré n, les équations à écrire sont au nombre de $\frac{p(p-1)}{2}$; tandis que la forme $[f_1 f_2 \ldots f_p \mathrm{F}^{s-p+1}]$ étant de degré $n - p + 2$, le nombre des équations qui expriment qu'elle est nulle est C_n^{p-2}, et de plus chacune d'elles contient les coefficients de *toutes* les relations données.

Si par exemple on a

$$\mathrm{F} = [u_1 u_2] + [u_3 u_4] + [u_5 u_6],$$
$$f_1 = a_1 u_1 + \ldots + a_6 u_6,$$
$$f_2 = b_1 u_1 + \ldots + b_6 u_6,$$
$$f_3 = c_1 u_1 + \ldots + c_6 u_6,$$

la condition que F soit de rang 6 — 6 = o en tenant compte des trois relations $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ est, par le premier procédé,

$$[f_1 f_2 f_3 \mathrm{F}] = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_5 & a_6 \\ b_2 & b_5 & b_6 \\ c_2 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_5 & a_6 \\ b_3 & b_5 & b_6 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_2 \\ b_4 & b_1 & b_2 \\ c_4 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_5 & a_1 & a_2 \\ b_5 & b_1 & b_2 \\ c_5 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_4 \\ b_5 & b_3 & b_4 \\ c_5 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_6 & a_1 & a_2 \\ b_6 & b_1 & b_2 \\ c_6 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_6 & a_3 & a_4 \\ b_6 & b_3 & b_4 \\ c_6 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Au contraire le théorème ci-dessus met les conditions demandées sous la forme beaucoup plus simple

$$b_1c_2 - c_1b_2 + b_3c_4 - c_3b_4 + b_5c_6 - c_5b_6 = 0,$$
$$c_1a_2 - a_1c_2 + c_3a_4 - a_3c_4 + c_5a_6 - a_5c_6 = 0,$$
$$a_1b_2 - b_1a_2 + a_3b_4 - b_3a_4 + a_5b_6 - b_5a_6 = 0.$$

68. On peut indiquer un théorème encore plus précis que le précédent et permettant de la manière la plus simple de trouver le rang de la forme à laquelle se réduit F quand on y suppose les variables liées par p relations données. Définissons pour cela la forme bilinéaire alternée

$$\Phi(\xi, \xi') = \sum a_{ij}\xi_i\xi'_j$$

par l'égalité

$$s[\mathrm{F}^{s-1}(\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n)(\xi'_1 u_1 + \ldots + \xi'_n u_n)] = \Phi(\xi, \xi')[\mathrm{F}^s];$$

la forme quadratique extérieure

$$\Phi(\xi) = \sum a_{ij}[\xi_i\xi_j]$$

est (à un facteur près) la forme adjointe de $\dfrac{\mathrm{F}^{s-1}}{(s-1)!}$; elle est *covariante absolue* de F en ce sens que si on effectue sur les variables $u_1, \ldots, u_n$ une substitution linéaire quelconque et sur les variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ la substitution linéaire qui conserve $\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n$, si enfin par ces deux substitutions les deux formes $\mathrm{F}(u)$ et $\Phi(\xi)$ deviennent respectivement $\overline{\mathrm{F}}(\bar{u})$ et $\overline{\Phi}(\bar{\xi})$, on a encore

$$s[\overline{\mathrm{F}}^{s-1}(\bar{\xi}_1\bar{u}_1 + \ldots + \bar{\xi}_n\bar{u}_n)(\bar{\xi}'_1\bar{u}_1 + \ldots + \bar{\xi}'_n\bar{u}_n)] = \overline{\Phi}(\bar{\xi}, \bar{\xi}')[\overline{\mathrm{F}}^s].$$

Si en particulier F a été réduite à sa forme canonique

$$\mathrm{F} = [u_1 u_2] + \ldots + [u_{2s-1}\, u_{2s}],$$

on trouve immédiatement pour Φ la forme canonique

$$\Phi = [\xi_1\xi_2] + \ldots + [\xi_{2s-1}\,\xi_{2s}].$$

De là résulte facilement l'identité générale

$$(6)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{F^{s-p}}{(s-p)!}(\xi_1 u_1+\ldots+\xi_n u_n)(\xi'_1 u_1+\ldots+\xi'_n u_n)\ldots(\xi_1^{(2p-1)}u_1+\ldots+\xi_n^{(2p-1)}u_n)\right] \\ \qquad\qquad = \dfrac{\Phi^{(p)}(\xi,\xi',\ldots,\xi^{(2p-1)})}{p!}\left[\dfrac{F^s}{s!}\right], \end{cases}$$

où la forme extérieure de degré p correspondant à la forme multilinéaire alternée $\Phi^{(p)}$ est égale à $[\Phi^p(\xi)]$: cette identité est évidente quand F a été réduite à sa forme canonique et est donc vraie dans le cas général. Cela revient au fond à la propriété, invoquée dans le numéro précédent, que la forme adjointe de $[F^{s-p}]$ est, à un facteur scalaire près, égale à $[\Phi^p]$.

En faisant en particulier $p = 2$, et prenant dans l'identité (6) les termes en $[\xi_i\xi'_j\xi''_k\xi'''_l]$, on obtient

$$(7)\qquad \left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}\,u_i u_j u_k u_l\right] = (a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{lj} + a_{il}a_{jk})\left[\frac{F^s}{s!}\right],$$

où les coefficients a_{ij} sont définis par

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}\,u_i u_j\right] = a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right].$$

On peut en déduire enfin une autre identité qui nous sera utile plus loin. Considérons la forme

$$\left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}\,u_i u_j u_k\right] - \left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}\,(a_{ij}u_k + a_{jk}u_i + a_{ki}u_j)\right];$$

elle est de degré $2s-1$; si on la multiplie extérieurement par une quelconque des variables $u_1, \ldots, u_{2s}$, soit u_l, on constate immédiatement d'après (7) que le produit est nul. Par suite la forme est elle-même identiquement nulle. Comme u_i, u_j, u_k peuvent être remplacées par trois formes linéaires quelconques des variables, nous arrivons au théorème suivant :

Si l'on considère des formes linéaires en nombre quelconque $f_1, f_2, \ldots, f_p$ et si l'on pose

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}\,f_i f_j\right] = a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right], \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p)$$

on a les identités

$$(8)\qquad \left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}\,f_i f_j f_k\right] = \left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}\,(a_{ij}f_k + a_{jk}f_i + a_{ki}f_j)\right].$$

69. Venons maintenant au problème énoncé plus haut, consistant à trouver le rang de la forme à laquelle se réduit F quand on y suppose les variables liées par p relations linéaires indépendantes

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots,\ f_p = 0.$$

Nous pouvons supposer que ces relations sont

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_p = 0;$$

il nous sera permis d'effectuer sur les u une substitution linéaire quelconque, sous la seule condition que les p premières variables $u_1, \ldots, u_p$ soient échangées entre elles. Il en résulte que nous pourrons effectuer sur les variables ξ une substitution linéaire quelconque, sous la seule condition que les $2s - p$ *dernières variables* $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{2s}$ soient échangées entre elles. Posons alors

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}\, u_i u_j\right] = a_{ij}\left[\frac{F^s}{s\,!}\right] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p).$$

Si dans Φ on supprime les termes en $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{2s}$, on obtient évidemment

$$\overline{\Phi} = \sum_{(ij)}^{1,\ldots,p} a_{ij}[\xi_i\xi_j].$$

Soit $2q$ le rang de la forme $\overline{\Phi}$; on pourra, par une substitution linéaire convenable effectuée sur $\xi_1, \ldots, \xi_p$, réduire $\overline{\Phi}$ à

$$\overline{\Phi} = [\xi_1\xi_2] + \ldots + [\xi_{2q-1}\xi_{2q}];$$

par suite on pourra réduire Φ, en retranchant au besoin de $\xi_1, \ldots, \xi_p$ des combinaisons linéaires de $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{2s}$, *ce qui est permis*, à

$$\begin{aligned}\Phi = [\xi_1\xi_2] + \ldots + [\xi_{2q-1}\xi_{2q}] + [\xi_{2q+1}\xi_{p+1}] + \ldots + [\xi_p\xi_{2p-2q}]\\ + [\xi_{2p-2q+1}\xi_{2p-2q+2}] + \ldots + [\xi_{2s-1}\xi_{2s}].\end{aligned}$$

Mais alors la forme F sera ramenée à

$$F = [u_1u_2] + \ldots + [u_{2q-1}u_{2q}] + [u_{2q+1}u_{p+1}] + \ldots + [u_pu_{2p-2q}] + \ldots + [u_{2s-1}u_{2s}].$$

On voit que, si l'on tient compte maintenant des relations

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0,\ \ldots,\ u_p = 0,$$

le rang de F est réduit de $2p - 2q$ unités.

Nous arrivons donc au théorème suivant :

Considérons les formes linéaires indépendantes $f_1, f_2, \ldots, f_p$, les $\frac{p(p-1)}{2}$ quantités a_{ij} définies par les égalités

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!} f_i f_j\right] = a_{ij}\left[\frac{F^s}{s\,!}\right]$$

et la forme quadratique extérieure à p variables $\xi_1, \ldots, \xi_p$,

$$\Phi(\xi) = \sum_{(ij)}^{1,\ldots,p} a_{ij}[\xi_i\xi_j].$$

Si cette forme est de rang $2q$, le rang de la forme F *se réduit de $2p - 2q$ unités quand on suppose les variables liées par les p relations*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0,\ \ldots,\ f_p = 0.$$

De plus si on effectue sur les p formes linéaires données une substitution linéaire telle que Φ *se réduise à sa forme canonique*

$$\Phi = [\xi_1 \xi_2] + \ldots + [\xi_{2q-1} \xi_{2q}],$$

la forme F *se réduit à la forme canonique*

$$F = [f_1 f_2] + \ldots + [f_{2q-1} f_{2q}] + [f_{2q+1} f_{p+1}] + \ldots + [f_p f_{2p-2q}] + \ldots + [f_{2s-1} f_{2s}],$$

en désignant par $f_{p+1}, \ldots, f_{2s}$ *de nouvelles formes linéaires convenablement choisies indépendantes entre elles et indépendantes des formes données.*

En particulier si $q = 0$. on retrouve le théorème précédemment énoncé et démontré (n° **67**).

CHAPITRE VII.

LES FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES ET LEURS FORMES DÉRIVÉES.

I. — *Le covariant bilinéaire d'une forme de Pfaff.*

70. Considérons maintenant une forme différentielle linéaire (forme de Pfaff)

$$\omega_\delta = a_1\delta x_1 + a_2\delta x_2 + \ldots + a_n\delta x_n.$$

On peut dériver de cette forme une forme bilinéaire alternée à deux séries de différentielles, à savoir

$$\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta = \sum a_i(\delta\delta' x_i - \delta'\delta x_i) + \sum(\delta a_i\delta' x_i - \delta x_i\delta' a_i).$$

Supposons que les deux symboles de différentiation soient échangeables entre eux, c'est-à-dire que l'on ait

$$\delta\delta' x_i = \delta'\delta x_i;$$

au second membre, qu'on appelle le *covariant bilinéaire* de la forme ω, on peut faire correspondre une forme différentielle quadratique extérieure que nous écrirons, d'après les conventions faites plus haut,

$$\omega'_\delta = \sum_i [\delta a_i \delta x_i] = \sum_{(ij)} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)[\delta x_i \delta x_j];$$

cette forme sera dite la *dérivée extérieure* de la forme ω.

Ce procédé de dérivation a une signification *indépendante du choix des variables*; de plus c'est celui qui fait passer d'une intégrale curviligne étendue à un contour fermé à l'intégrale double étendue à une surface limitée par le contour.

Si par exemple on a trois variables x, y, z et si on pose

$$\omega_\delta = P\delta x + Q\delta y + R\delta z,$$

on a

$$\begin{aligned}\omega'_\delta = [\delta P \delta x] + [\delta Q \delta y] + [\delta R \delta z] &= \frac{\partial P}{\partial x}[\delta x \delta x] + \frac{\partial P}{\partial y}[\delta y \delta x] + \frac{\partial P}{\partial z}[\delta z \delta x] \\ &+ \frac{\partial Q}{\partial x}[\delta x \delta y] + \frac{\partial Q}{\partial y}[\delta y \delta y] + \frac{\partial Q}{\partial z}[\delta z \delta y] \\ &+ \frac{\partial R}{\partial x}[\delta x \delta z] + \frac{\partial R}{\partial y}[\delta y \delta z] + \frac{\partial R}{\partial z}[\delta z \delta z] \\ = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)[\delta y \delta z] &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)[\delta z \delta x] + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)[\delta x \delta y]\end{aligned}$$

et la formule de Stokes s'écrit

$$\int_C \omega_\delta = \iint_S \omega'_\delta,$$

S désignant une surface limitée par le contour C.

La condition nécessaire et suffisante pour que ω' s'annule est que la forme ω soit une différentielle exacte.

Remarque. — La permutabilité des deux symboles de différentiation δ et δ' doit avoir lieu quand les différentiations s'appliquent à une fonction arbitraire y des variables indépendantes, *sans quoi l'opération qui vient d'être définie n'aurait pas un caractère covariant.* Or c'est ce qu'il est facile de vérifier ; si on pose

$$\omega_\delta = \delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\delta x_n,$$

ω_δ est une différentielle exacte et on a

$$\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta\delta' y = \delta'\delta y.$$

II. — *La dérivation extérieure.*

71. Le même procédé de dérivation s'applique à une forme différentielle extérieure de degré quelconque. Soit par exemple une forme quadratique

$$\Omega = \sum a_{ij}[\delta x_i \delta x_j] ;$$

considérons la forme bilinéaire alternée

$$\Omega(\delta, \delta') = \sum a_{ij}(\delta x_i \delta' x_j - \delta x_j \delta' x_i)$$

qui lui correspond, et induisons *trois* symboles de différentiation échangeables entre eux δ, δ', δ''. Considérons enfin l'expression

$$\delta\Omega(\delta', \delta'') - \delta'\Omega(\delta, \delta'') + \delta''\Omega(\delta, \delta'),$$

qui a évidemment une signification intrinsèque indépendante du choix des variables. On constate facilement, en faisant le calcul, qu'elle se réduit à une expression trilinéaire alternée

$$\Omega'(\delta, \delta', \delta'') = \sum [\delta a_{ij}(\delta' x_i \delta'' x_j - \delta' x_j \delta'' x_i) - \delta' a_{ij}(\delta x_i \delta'' x_j - \delta x_j \delta'' x_i) + \delta'' a_{ij}(\delta x_i \delta' x_j - \delta x_j \delta' x_i)].$$

A cette forme trilinéaire correspond maintenant une forme différentielle cubique extérieure

$$\Omega'_\delta = \sum [\delta a_{ij} \delta x_i \delta x_j] = \sum \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right) [\delta x_i \delta x_j \delta x_k],$$

que nous appellerons la forme *dérivée* de Ω.

72. Il est important, dans le cas examiné, de se rendre compte de la relation qu'il y a entre l'opération de dérivation d'une forme quadratique extérieure et l'opération qui consiste à passer d'une intégrale double étendue à une surface *fermée* à l'intégrale triple étendue au volume limité par la surface.

Imaginons pour cela que $x_1, \ldots, x_n$ soient des fonctions de trois paramètres α, β, γ et considérons dans l'espace à n dimensions un parallélépipède élémentaire dont les arêtes sont des portions de lignes de coordonnées, les sommets A, B, C, D, E, F, G, H de ce parallélépipède correspondant respectivement aux coordonnées curvilignes

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha + \delta\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha, \beta + \delta'\beta, \gamma), \quad (\alpha, \beta, \gamma + \delta''\gamma),$$
$$(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta'\beta, \gamma), \; (\alpha + \delta\alpha, \beta, \gamma + \delta''\gamma), \; (\alpha, \beta + \delta'\beta, \gamma + \delta''\gamma), \; (\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta'\beta, \gamma + \delta''\gamma).$$

Comme on le voit, les symboles δ, δ', δ'' se rapportent respectivement à des différentiations par rapport aux trois paramètres α, β, γ.

Considérons maintenant l'intégrale curviligne $\iint \Omega$ étendue à la surface qui limite ce parallélépipède.

Les intégrales étendues aux trois faces qui partent de A sont, au signe près,

$$\Omega(\delta', \delta''), \qquad \Omega(\delta'', \delta), \qquad \Omega(\delta, \delta'),$$

et, pour que ces intégrales soient étendues toutes sur la face interne ou toutes sur la face externe, il faut les prendre égales aux trois expressions précédentes, ou égales et opposées. Si nous les prenons égales et opposées, la somme des intégrales étendues aux six faces sera

$$\begin{aligned} &- \Omega(\delta', \delta'') - \Omega(\delta'', \delta) - \Omega(\delta, \delta') + [\Omega(\delta', \delta'') + \delta\Omega(\delta', \delta'')] \\ &+ [\Omega(\delta'', \delta) + \delta'\Omega(\delta'', \delta)] + [\Omega(\delta, \delta') + \delta''\Omega(\delta, \delta')] \\ &= \delta\Omega(\delta', \delta'') + \delta'\Omega(\delta'', \delta) + \delta''\Omega(\delta, \delta') = \Omega'(\delta, \delta', \delta''). \end{aligned}$$

L'intégrale de surface $\iint \Omega$ est donc bien transformée en intégrale de volume $\iiint \Omega'$.

Dans le cas simple de trois variables, si on pose

$$\Omega = P[\delta y \delta z] + Q[\delta z \delta x] + R[\delta x \delta y],$$

on a

$$\Omega' = [\delta P \delta y \delta z] + [\delta Q \delta z \delta x] + [\delta R \delta x \delta y] = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)[\delta x \delta y \delta z].$$

73. Ces considérations s'étendraient à des formes extérieures de degré quelconque. Toute forme extérieure admet une forme dérivée dont le degré est supérieur d'une unité et dont le calcul est extrêmement facile, puisque chaque terme de la forme

$$A[\delta x_i \delta x_j \dots \delta x_l]$$

donne naissance au terme dérivé

$$[\delta A \delta x_i \delta x_j \dots \delta x_l].$$

Notons quelques formules utiles et faciles à démontrer. *Si m est un coefficient, fonction finie des variables, et Ω une forme extérieure quelconque. on a*

$$(m\Omega)' = [dm\Omega] + m\Omega'.$$

Si Ω et Π sont deux formes différentielles extérieures quelconques, on a

$$[\Omega\Pi]' = [\Omega'\Pi] \pm [\Omega\Pi'],$$

le signe + se rapportant au cas où Ω est de degré pair et le signe — au cas où Ω est de degré impair. En particulier si Ω est de degré pair, la forme dérivée de $[\Omega^p]$ est donnée par la formule ordinaire

$$[\Omega^p]' = p[\Omega^{p-1}\Omega'].$$

74. Nous avons supposé dans ce qui précède que les coefficients des formes considérées étaient des fonctions continues admettant des dérivées partielles du premier ordre. *Il est cependant des cas où les coefficients d'une forme Ω n'admettant pas de dérivées, on peut cependant définir une forme dérivée extérieure Ω'*. Un exemple classique est fourni par la théorie du potentiel.

Considérons un volume matériel V limité par une surface S ; soit ρ la densité en un point de V ; nous supposons la fonction ρ continue. Le potentiel U de cette masse est une fonction continue dans tout l'espace, admettant partout des dérivées du premier ordre continues. Il existe à l'égard de cette fonction un théorème (théorème de Gauss) traduit par la formule

$$\iint \frac{\partial U}{\partial x}\, dydz + \frac{\partial U}{\partial y}\, dzdx + \frac{\partial U}{\partial z}\, dxdy = \iiint -4\pi\rho dxdydz,$$

l'intégrale du premier membre étant étendue à une surface fermée *quelconque* et celle du second membre au volume limité par cette surface. Il résulte de là qu'en posant

$$\Omega = \frac{\partial U}{\partial x}[dydz] + \frac{\partial U}{\partial y}[dzdx] + \frac{\partial U}{\partial z}[dxdy],$$

on peut définir la dérivée extérieure Ω' de Ω par

$$\Omega' = -4\pi\rho[dxdydz].$$

Si la fonction U *admet des dérivées partielles du second ordre*, cela revient à la formule classique de Poisson, car le procédé de dérivation défini ci-dessus donne immédiatement

$$\Omega' = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)[dxdydz];$$

mais si la fonction U n'admet pas de dérivées partielles du second ordre, *ce qui est le cas général lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur la fonction* ρ, on peut encore définir la dérivée Ω'.

On conçoit donc la possibilité de définir la dérivation extérieure comme une opération *autonome*, indépendante de la dérivation classique. Il y aurait lieu alors de démontrer directement la formule du n° précédent

$$[\Omega\Pi]' = [\Omega'\Pi] \pm [\Omega\Pi'], \tag{1}$$

où on suppose simplement sur Ω et Π qu'elles sont dérivables extérieurement.

75. Prenons le cas le plus simple d'une forme linéaire à deux variables

$$\omega = P\delta x + Q\delta y$$

admettant une dérivée extérieure

$$\omega' = R[\delta x \delta y].$$

Supposons les fonctions P et Q continues et considérons enfin une fonction m admettant des dérivées partielles du premier ordre continues. La formule

$$(m\omega)' = m\omega' + [\delta m \omega]$$

revient ici à

$$\int m(P\delta x + Q\delta y) = \iint \left(mR + Q\frac{\partial m}{\partial x} - P\frac{\partial m}{\partial y}\right)\delta x \delta y.$$

La démonstration de cette formule peut se faire assez simplement. Soit A l'aire d'intégration, C le contour qui la limite. Partageons l'aire A en un grand nombre d'aires partielles, par exemple par des parallèles aux axes. Prenons dans chacune des aires partielles un point (x_0, y_0) et appelons

$$m_0, P_0, Q_0, \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0$$

les valeurs des fonctions m, P, Q, $\frac{\partial m}{\partial x}$, $\frac{\partial m}{\partial y}$ en ce point. On pourra poser, à l'intérieur ou sur le contour de cette aire,

$$m = m_0 + (x - x_0)\left[\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0 + \varepsilon_1\right] + (y - y_0)\left[\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0 + \varepsilon_2\right],$$
$$P = P_0 + \varepsilon_3, \qquad Q = Q_0 + \varepsilon_4;$$

l'intégrale $\int m(P\delta x + Q\delta y)$ étendue au contour de cette aire partielle sera égale à

$$\int m_0(P\delta x + Q\delta y) + \int \left[(x - x_0)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0\right](P_0\delta x + Q_0\delta y)$$

plus une quantité inférieure à $\varepsilon M\Delta l$, en désignant par ε une limite supérieure de ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, par M un nombre fixe, par Δ le diamètre de l'aire et l la longueur de son contour. La somme de toutes ces quantités supplémentaires peut évidemment être rendue aussi petite qu'on veut, car $\Sigma\Delta l$ est de l'ordre de l'aire totale A. Quant à la somme des deux intégrales écrites plus haut, elle est égale à

$$\sum \iint \left[m_0 R + Q_0\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0 - P_0\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0\right]\delta x\delta y.$$

On en déduit facilement la démonstration de la formule en question.

Cette démonstration s'étendrait avec des hypothèses analogues au cas d'une forme quadratique

$$\Omega = P[\delta y\delta z] + Q[\delta z\delta x] + R[\delta x\delta y];$$

l'existence de l'égalité

$$\iint P\delta y\delta z + Q\delta z\delta x + R\delta x\delta y = \iiint H\delta x\delta y\delta z$$

entraîne

$$\iint m(P\delta y\delta z + Q\delta z\delta x + R\delta x\delta y) = \iiint \left(mH + P\frac{\partial m}{\partial x} + Q\frac{\partial m}{\partial y} + R\frac{\partial m}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z.$$

La démonstration semble plus difficile dans le cas de deux formes linéaires à trois variables

$$\omega = A\delta x + B\delta y + C\delta z,$$
$$\omega_1 = A'\delta x + B'\delta y + C'\delta z.$$

Supposons que ces deux formes soient dérivables et qu'on ait par exemple

$$\int A\delta x + B\delta y + C\delta z = \iint P\delta y\delta z + Q\delta z\delta x + R\delta x\delta y,$$

$$\int A'\delta x + B'\delta y + C'\delta z = \iint P'\delta y\delta z + Q'\delta z\delta x + R'\delta x\delta y;$$

la formule (1) deviendrait ici

$$\iint (BC' - CB')\delta y\delta z + (CA' - AC')\delta z\delta x + (AB' - BA')\delta x\delta y$$
$$= \iiint (PA' + QB' + RC' - P'A - Q'B - R'C)\delta x\delta y\delta z.$$

Elle ne semble pas pouvoir se démontrer par le même procédé que dans

les cas précédents, à moins d'ajouter des hypothèses supplémentaires, par exemple que les fonctions A, B, C, A′, B′, C′ satisfont à une condition analogue à celle de Lipschitz. Il y aurait intérêt à étudier cette question et à voir si réellement *la dérivabilité d'un produit extérieur résulte toujours de la dérivabilité de ses facteurs.*

Quant à la question de savoir à quelles conditions une forme différentielle extérieure est dérivable, elle se lie, du moins pour les formes de degré $n-1$ à n variables, à la théorie des fonctions additives d'ensemble de M. C. de la Vallée-Poussin (¹). La forme $\Omega = P[\delta y \delta z] + Q[\delta z \delta x] + R[\delta x \delta y]$ par exemple est dérivable si la somme des intégrales $\iint \Omega$ étendues aux surfaces qui limitent un nombre fini de cubes formés de plans parallèles aux plans de coordonnées tend vers zéro quand la somme des volumes de ces cubes tend vers zéro ; la fonction H qui entre dans l'expression de la dérivée

$$\Omega' = H[\delta x \delta y \delta z]$$

n'est naturellement pas continue en général.

Dans ce qui suit, nous admettrons toujours la légitimité des opérations effectuées.

III. — *Les formes extérieures différentielles exactes.*

76. Voici maintenant un théorème important :

La dérivée de la dérivée Ω' d'une forme différentielle extérieure quelconque Ω est identiquement nulle.

Prenons en effet dans Ω un terme quelconque, soit

$$a[\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_p] ;$$

le terme correspondant de Ω' est

$$[\delta a \delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_p].$$

Si a ne dépend que de $x_1, \ldots, x_p$, ce dernier terme est nul, et sa dérivée aussi ; si au contraire a est indépendant de $x_1, \ldots, x_p$, on peut faire un changement de variables tel que a devienne égal à x_{p+1} ; la dérivée du terme

$$[\delta x_{p+1} \delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_p]$$

est alors nulle, puisque le coefficient de ce terme étant l'unité, sa dérivation ne donnera rien dans la formation de la dérivée extérieure.

Ce théorème admet une réciproque, à savoir :

Si la dérivée d'une forme différentielle Ω est nulle, la forme Ω peut être regardée comme la dérivée d'une forme Π dont le degré est inférieur d'une unité à celui de Ω.

(¹) Voir l'ouvrage intitulé : *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* ; Paris, Gauthier-Villars, 1916.

Nous nous appuierons, pour démontrer ce théorème, sur le lemme suivant, qui nous sera du reste utile plus loin :

Si la dérivée d'une forme Ω est nulle et si cette forme ne contient pas la différentielle δx_n, ses coefficients sont tous indépendants de x_n.

Prenons en effet dans Ω un terme tel que

$$A[\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_p],$$

il fournira dans la dérivation le terme

$$[\delta A \delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_p]$$

d'où, en développant, plusieurs termes dont l'un sera

$$\frac{\partial A}{\partial x_n}[\delta x_n \delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_p];$$

ce dernier terme ne peut manifestement se réduire avec aucun autre, puisqu'aucun terme de Ω ne contient δx_n. Comme $\Omega' = 0$, on a nécessairement

$$\frac{\partial A}{\partial x_n} = 0.$$

Le lemme étant ainsi démontré, revenons à notre théorème. Appelons Ω_0 ce que devient Ω quand on y fait $x_n = x_n^0$ et $\delta x_n = 0$. La dérivée de Ω_0 est manifestement nulle si celle de Ω l'est. Supposons alors le théorème démontré pour $n - 1$ variables : il sera possible de trouver une forme Π_0 construite avec les variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et dont Ω_0 soit la dérivée :

$$\Pi_0' = \Omega_0.$$

Cela étant, mettons à part dans la forme donnée Ω et dans la forme inconnue Π les termes qui ne contiennent pas δx_n et ceux qui le contiennent ; on pourra écrire

$$\Omega = \Omega_1 + [\delta x_n \Omega_2], \qquad \Pi = \Pi_1 + [\delta x_n \Pi_2];$$

si nous calculons dans Π' les termes qui contiennent δx_n, nous trouvons

$$\Pi' = \left[\delta x_n \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_n}\right] - [\delta x_n \Pi_2'] + \ldots$$

Choisissons la forme Π_2 *arbitrairement* et déterminons Π_1 par les conditions

1° que pour $x_n = x_n^0$, Π_1 se réduise à Π_0 ;

2° que l'on ait

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_n} = \Pi_2' + \Omega_2;$$

on obtient ainsi Π_1 par des quadratures.

La forme Π étant choisie comme il vient d'être dit, elle jouit des propriétés suivantes :

1° la différence $\Pi' - \Omega$, quand on a réduit les termes semblables, ne contient plus δx_n ;

2° elle se réduit à zéro quand on fait dans ses coefficients $x_n = x_n^0$.

Remarquons maintenant que la dérivée de cette forme est nulle et que par

suite, d'après le lemme, tous ses coefficients ont une valeur indépendante de x_n; elle est donc identiquement nulle et le théorème est démontré.

La démonstration même montre que dans la forme Π on peut choisir arbitrairement les termes qui contiennent δx_n, choisir arbitrairement les valeurs pour $x_n = x_n^0$ des termes qui ne contiennent pas δx_n, mais contiennent δx_{n-1}; choisir arbitrairement les valeurs pour $x_n = x_n^0$, $x_{n-1} = x_{n-1}^0$, des termes qui ne contiennent ni δx_n ni δx_{n-1}, mais contiennent δx_{n-2}, et ainsi de suite.

Il est bien clair du reste que si l'on a une solution du problème, toutes les autres s'en déduiront en ajoutant à Π la dérivée d'une forme arbitraire (de degré inférieur de deux unités à celui de Ω).

77. Si Ω est une forme linéaire, l'hypothèse que sa dérivée extérieure est nulle conduit donc, d'après le théorème précédent, à la conclusion déjà signalée que Ω est une différentielle exacte. Si Ω est une forme quadratique à trois variables

$$\Omega = P[\delta y \delta z] + Q[\delta z \delta x] + R[\delta x \delta y].$$

la condition.

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que Ω puisse être regardée comme la dérivée d'une forme linéaire, c'est-à-dire pour qu'on puisse trouver trois fonctions A, B, C satisfaisant à

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = P,$$
$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = Q,$$
$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = R.$$

Remarque. — Si les coefficients de la forme Ω sont uniformes dans un certain domaine, la condition $\Omega' = 0$ n'est pas toujours suffisante pour assurer l'existence d'une forme Π *uniforme dans ce domaine* et dont Ω soit la dérivée extérieure. Considérons par exemple le domaine (fermé et sans frontières) à deux dimensions formé par les points d'une sphère Σ, et soit Ω une forme de degré 2 uniforme dans ce domaine (et à coefficients admettant des dérivées partielles du premier ordre continues). La dérivée Ω' est manifestement nulle. Néanmoins s'il existait une forme ω linéaire dont la dérivée ω' fût égale à Ω, on aurait, en intégrant deux fois $\int \omega$ le long d'un même grand cercle de la sphère dans deux sens différents,

$$\iint_\Sigma \Omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère. *L'équation précédente donne une condition supplémentaire pour que Ω puisse être regardée comme dérivée exacte d'une forme ω uniforme sur toute la sphère.*

CHAPITRE VIII.

LE SYSTÈME CARACTÉRISTIQUE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE. FORMATION DES INVARIANTS INTÉGRAUX.

I. — *Le système caractéristique d'une forme différentielle extérieure.*

78. Les résultats du Chapitre précédent nous permettent de former facilement le système de Pfaff *caractéristique* d'une forme différentielle extérieure donnée Ω.

Remarquons pour cela que si Ω est invariante pour le système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

Ω pourra s'exprimer au moyen de $n - 1$ intégrales premières indépendantes $y_1, \ldots, y_{n-1}$ et de leurs différentielles; *il en sera par suite de même de sa dérivée* Ω'. Par conséquent le système d'équations (aux différentielles totales) linéaires associé aux deux formes extérieures Ω et Ω' sera une conséquence des équations

$$(2) \qquad dy_1 = 0, \ldots, dy_{n-1} = 0,$$

et par suite des équations (1).

Autrement dit, *pour que le système* (1) *admette* $\Omega(\delta)$ *comme forme invariante, il faut que le système associé de* Ω *et de* Ω' *soit vérifié quand on y remplace les variables* $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ *par* $X_1, \ldots, X_n$.

Réciproquement supposons cette condition réalisée. Le système associé de $\Omega(d)$ étant vérifié en tenant compte des équations (1) le sera en tenant compte des équations équivalentes (2); donc $\Omega(d)$, considérée comme forme extérieure des quantités dx_i, pourra s'exprimer uniquement au moyen de $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$, les coefficients étant des fonctions des x, qu'on pourra toujours

supposer exprimées au moyen de $y_1, \ldots, y_{n-1}$ et x_n (si $X_n \neq 0$). On aura donc

$$\Omega = \sum A_{i_1\ldots i_p} [dy_{i_1}\ldots dy_{i_p}].$$

En formant Ω', on trouve que le seul terme en $[dx_n\, dy_{i_1}\ldots dy_{i_p}]$ a pour coefficient $\frac{\partial A_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_n}$; or par hypothèse Ω' doit aussi pouvoir s'exprimer au moyen des seules quantités dy_i; on a donc

$$\frac{\partial A_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_n} = 0;$$

par suite Ω s'exprime au moyen des intégrales premières du système donné et de leurs différentielles : c'est donc une forme invariante.

Il résulte immédiatement de là *que les équations du système caractéristique de Ω se réduisent aux équations du système associé de Ω jointes aux équations du système associé de Ω'.*

79. Examinons quelques cas particuliers importants.

Supposons que Ω soit une dérivée exacte, c'est-à-dire $\Omega' = 0$. Dans ce cas *le système caractéristique de la forme différentielle Ω se confond avec le système associé de la forme Ω.*

Cherchons comme application le système caractéristique d'un invariant intégral (complet) *relatif* $\int \Omega$. Cet invariant relatif se ramène à l'invariant absolu $\int \Omega'$; or Ω' est une dérivée exacte. Donc *le système caractéristique d'un invariant intégral relatif $\int \Omega$ se confond avec le système associé de la forme dérivée Ω'.*

C'est ce qui se passe pour l'invariant intégral linéaire de la Dynamique

$$\int \omega_\delta = \int \sum p_i \delta q_i - H\delta t.$$

On a ici

$$\omega'_\delta = \sum [\delta p_i \delta q_i] - [\delta H \delta t].$$

Le système associé de la forme ω' est

$$\frac{\partial \omega'}{\partial(\delta q_i)} = 0, \qquad \frac{\partial \omega'}{\partial(\delta p_i)} = 0, \qquad \frac{\partial \omega'}{\partial(\delta t)} = 0,$$

c'est-à-dire, en prenant le symbole d au lieu de δ,

$$-\,dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\, dt = 0,$$

$$dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt = 0,$$

$$dH - \frac{\partial H}{\partial t}\, dt = 0 :$$

c'est le calcul même que nous avons fait dans le Chapitre I (n° **11**).

Ici la forme différentielle ω' est quadratique ; nous savons par suite d'avance que le nombre des équations indépendantes du système associé est *pair* : c'est ce qui explique que les $2n + 1$ équations du système caractéristique se réduisent à $2n$. Nous avons de même l'explication de ce qui se passe en Hydrodynamique à propos de la forme invariante

$$\xi[\delta y \delta z] + \eta[\delta z \delta x] + \zeta[\delta x \delta y] + (\eta w - \zeta v)[\delta x \delta t] + (\zeta u - \xi w)[\delta y \delta t] + (\xi v - \eta u)[\delta z \delta t].$$

Ici $n = 4$; le système caractéristique contient donc 4 ou 2 ou 0 équations indépendantes : or ce ne peut pas être 4 puisque la forme est invariante pour les équations différentielles des trajectoires des molécules : donc c'est 2 ou 0. C'est 0 si $\xi = \eta = \zeta = 0$, c'est-à-dire si le mouvement est irrotationnel. Dans le cas contraire on pouvait prévoir *a priori* que les trajectoires ne seraient pas les seules courbes caractéristiques de la forme.

80. Un dernier cas important est celui où la forme Ω est de degré $n - 1$. Si elle est invariante pour un système d'équations différentielles, ce système est nécessairement unique, car le système de Pfaff associé de Ω est formé de $n - 1$ équations indépendantes. Pour que le système associé de Ω' ne contienne pas plus de $n - 1$ équations indépendantes, il faut évidemment que Ω' soit nul. Par suite *pour qu'une forme Ω de degré $n - 1$ puisse être invariante pour un système d'équations différentielles, il faut et il suffit que sa dérivée soit identiquement nulle.*

Un exemple simple est fourni par l'invariant intégral de la Cinématique des milieux continus

$$\iiint \rho(\delta x - u\delta t)(\delta y - v\delta t)(\delta z - w\delta t).$$

La forme Ω est ici

$$\Omega = \rho[\delta x \delta y \delta z] - \rho u[\delta y \delta z \delta t] - \rho v[\delta z \delta x \delta t] - \rho w[\delta x \delta y \delta t].$$

La condition $\Omega' = 0$ donne

$$\Omega' \equiv \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right][\delta t \delta x \delta y \delta z] = 0;$$

c'est la condition de continuité, ou la loi de conservation de la matière

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

On voit que *cette loi de conservation de la matière se traduit par la condition simple que la dérivée Ω' de la forme qui définit la quantité de matière élémentaire soit nulle.*

81. Les lois de conservation en Physique se traduisent souvent par des conditions analogues. La loi de conservation du flux de force pour un champ de forces X, Y, Z se traduit par la condition que la *divergence* de ce champ de force soit nulle, c'est-à-dire

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

or ceci exprime simplement que la dérivée du flux de force élémentaire

$$\Omega = X[\delta y \delta z] + Y[\delta z \delta x] + Z[\delta x \delta y]$$

est nulle.

Tout champ magnétique (statique) satisfait à cette condition. Le champ électromagnétique, défini au moyen de la forme extérieure

$$\Omega = H_x[\delta y \delta z] + H_y[\delta z \delta x] + H_z[\delta x \delta y] + E_x[\delta x \delta t] + E_y[\delta y \delta t] + E_z[\delta z \delta t],$$

satisfait aussi à la condition que Ω' est nul. On a

$$\Omega' = \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right)[\delta x \delta y \delta z] + \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)[\delta y \delta z \delta t]$$
$$+ \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)[\delta z \delta x \delta t] + \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)[\delta x \delta y \delta t].$$

En annulant les quatre coefficients de Ω' on obtient les quatre équations classiques, qu'on peut écrire, en notations vectorielles,

$$\text{div } H = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \text{curl } E = 0.$$

La forme de l'Hydrodynamique déjà si souvent considérée

$$\Omega = \xi[\delta y \delta z] + \eta[\delta z \delta x] + \zeta[\delta x \delta y] + (\eta w - \zeta v)[\delta x \delta t] + (\zeta u - \xi w)[\delta y \delta t] + (\xi v - \eta u)[\delta z \delta t]$$

ayant aussi sa dérivée nulle, puisque Ω est la dérivée de la forme linéaire « quantité de mouvement-énergie », les vecteurs (ξ, η, ζ) et $(\eta w - \zeta v, \zeta u - \xi v, \xi v - \eta u)$ satisfont aux mêmes relations que le champ magnétique et le champ électrique ; ces deux vecteurs sont l'un le tourbillon, qui joue le rôle de la force magnétique, l'autre le produit vectoriel du tourbillon et de la vitesse qui joue le rôle de la force électrique.

Il est à remarquer que le champ électromagnétique (ou plutôt la forme Ω qui le représente) ne peut être invariant pour aucun système d'équations différentielles, puisque $[\Omega^2]$ n'est pas nul en général. Il n'y aurait d'exception que si le champ magnétique était perpendiculaire au champ électrique ; le système caractéristique serait alors défini par les équations

$$H_z dy - H_y dz + E_x dt = 0,$$
$$H_x dz - H_z dx + E_y dt = 0,$$
$$H_y dx - H_x dy + E_z dt = 0,$$
$$- E_x dx - E_y dy - E_z dz = 0,$$

qui se réduisent à trois. L'un des systèmes d'équations différentielles qui admettent Ω comme forme invariante serait alors

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z} = \frac{dt}{0};$$

il définit à chaque instant les lignes de force du champ magnétique ; un autre est

$$\frac{dx}{E_y H_z - E_z H_y} = \frac{dy}{E_z H_x - E_x H_z} = \frac{dz}{E_x H_y - E_y H_x} = \frac{dt}{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}.$$

Si le champ magnétique était nul, les variétés caractéristiques seraient définies par les équations

$$dt = 0, \quad E_x dx + E_y dy + E_z dz = 0\,;$$

ce seraient les surfaces équipotentielles considérées à chaque instant t.

II. — *Formation des invariants intégraux.*

82. Il est évident que le produit extérieur de deux formes extérieures invariantes est aussi une forme invariante.

D'après cela la connaissance d'une forme extérieure invariante Ω entraîne la connaissance de toute une série d'autres formes invariantes, à savoir Ω' et toutes les formes déduites par multiplication extérieure de Ω et de Ω'.

Supposons d'abord que Ω soit une forme invariante *absolue* de degré *pair* : on a alors les deux séries de formes invariantes absolues

$$[\Omega^p], \quad [\Omega^{p-1}\Omega'] \quad (p = 1, 2, \ldots)\,;$$

la dérivée d'une forme de la première série est une forme de la seconde série, la dérivée d'une forme de la seconde série est nulle.

Supposons en second lieu Ω forme invariante *absolue* de degré *impair* : on a les deux séries

$$[\Omega'^p], \quad [\Omega\Omega'^{p-1}], \quad (p = 1, 2, \ldots)\,;$$

la dérivée d'une forme de la première série est nulle ; la dérivée d'une forme de la seconde série est égale à une forme de la première série.

Supposons maintenant qu'on ait un invariant intégral *relatif* $\int \Omega$ et supposons d'abord Ω de degré pair ; on ne peut en déduire qu'un invariant nouveau, l'invariant absolu $\int \Omega'$.

Si au contraire Ω est de degré impair, on a une série d'invariants intégraux relatifs $\int \Omega\Omega'^{p-1}$ et une série d'invariants intégraux absolus $\int \Omega'^p$. Du reste l'invariant relatif $\int \Omega\Omega'^{p-1}$ se ramène par dérivation à l'invariant absolu $\int \Omega'^p$.

Il en est ainsi par exemple de l'invariant relatif de la Dynamique

$$\int \omega = \int \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta q_i - \mathrm{H}\delta t\,;$$

les invariants intégraux relatifs qu'on en déduit sont

$$\int \omega\omega'^{p-1} \quad (p = 1, \ldots, n)\,;$$

les invariants intégraux absolus sont

$$\int \omega'^p \quad (p = 1, \ldots, n).$$

Il existe donc un invariant (relatif ou absolu) d'un degré donné quelconque inférieur ou égal à $2n$.

83. Il ne faudrait pas croire que les invariants nouveaux dont nous venons de signaler l'existence soient toujours les seuls qui puissent se déduire (sans intégration) d'un invariant donné. Supposons par exemple qu'on connaisse une forme invariante Ω réductible à la forme

$$\Omega = [\omega_1\omega_2\omega_3] + [\omega_4\omega_5\omega_6],$$

où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ sont six formes linéaires (de Pfaff) indépendantes. Introduisons six indéterminées $\xi_1, \ldots, \xi_6$ et considérons la forme quadratique auxiliaire

$$\Pi = \xi_1 \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_1} + \xi_2 \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_2} + \ldots + \xi_6 \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_6}.$$

Il est évident que si on regarde les ξ comme des quantités covariantes aux ω, la forme Π est covariante de Ω. Exprimons que cette forme est de rang 2; nous obtenons les conditions

$$\xi_i\xi_\alpha = 0, \qquad (i = 1, 2, 3; \ \alpha = 4, 5, 6);$$

il y a deux solutions possibles fournies, soit par

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0,$$

soit par

$$\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0.$$

Il résulte de là l'existence de deux systèmes de trois équations de Pfaff covariantes, à savoir

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$
$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 0.$$

Par suite encore la forme $[\omega_1\omega_2\omega_3]$ et la forme $[\omega_4\omega_5\omega_6]$ sont elles aussi covariantes : la première s'obtient en tenant compte dans Ω des équations du second système covariant; la deuxième en tenant compte des équations du premier système covariant.

Or supposons Ω exprimée au moyen des intégrales première du système d'équations dont Ω est forme invariante ainsi que de leurs différentielles. La formation des deux systèmes de Pfaff covariants se fera aussi bien que pour la forme réduite et chacun d'eux ne contiendra que les intégrales premières et leurs différentielles : il en sera de même des deux formes $[\omega_1\omega_2\omega_3]$ et $[\omega_4\omega_5\omega_6]$, *qui sont par suite des formes invariantes.*

L'existence de l'invariant intégral $\int\Omega$ *entraîne donc l'existence de chacun des invariants intégraux* $\int\omega_1\omega_2\omega_3$, $\int\omega_4\omega_5\omega_6$.

On verrait par un raisonnement analogue que *l'existence d'une forme invariante de degré $p > 2$ réductible à une somme de h termes monômes tels que les*

hp facteurs qui entrent dans ces termes soient linéairement indépendants entraîne la propriété de chacun des termes monômes d'être une forme invariante.

Le théorème n'est pas vrai si $p = 2$.

84. Dans certains cas l'existence d'une forme invariante entraîne l'existence d'une *équation* invariante. Considérons par exemple la forme

$$\Omega = [\omega_1\omega_2\omega_5] + [\omega_3\omega_4\omega_5],$$

où $\omega_1, \ldots, \omega_5$ désignent cinq formes de Pfaff indépendantes. La seule relation linéaire entre ces formes qui annule Ω est évidemment

$$\omega_5 = 0;$$

cette dernière équation est donc *invariante* : elle peut s'exprimer au moyen des intégrales premières des équations différentielles pour lesquelles Ω est une forme invariante.

D'une manière générale si Ω est une forme invariante et *si le système associé de Ω ne se confond pas avec son système caractéristique*, ce système associé est un système de Pfaff invariant.

On pourrait varier ces considérations de bien des manières.

85. Prenons encore le cas de deux formes invariantes quadratiques Ω_1 et Ω_2 ayant le même système associé ; soit $2s$ leur rang commnn. L'équation de degré s en λ

$$[(\Omega_1 - \lambda\Omega_2)^s] = 0,$$

qui exprime que le rang de la forme $\Omega_1 - \lambda\Omega_2$ est inférieur à $2s$, a évidemment une signification invariante. *Les racines de l'équation en λ sont donc des intégrales premières des équations différentielles qui admettent Ω_1 et Ω_2 comme intégrales premières.* On peut démontrer que, *dans le cas général*, Ω_1 et Ω_2 sont réductibles aux formes

$$\Omega_1 = \lambda_1[\omega_1\omega_2] + \lambda_2[\omega_3\omega_4] + \ldots + \lambda_s[\omega_{2s-1}\omega_{2s}],$$
$$\Omega_2 = [\omega_1\omega_2] + [\omega_3\omega_4] + \ldots + [\omega_{2s-1}\omega_{2s}].$$

Chacune des formes monômes $[\omega_1\omega_2]$, $[\omega_3\omega_4]$, ..., $[\omega_{2s-1}\omega_{2s}]$ est invariante.

CHAPITRE IX.

LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUI ADMETTENT UNE TRANSFORMATION INFINITÉSIMALE.

I. — *La notion de transformation infinitésimale.*

85. Une *transformation* à n variables est définie par un système d'équations

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

résolubles par rapport à $x_1, \ldots, x_n$. Géométriquement, si dans l'espace à n dimensions on regarde $x_1, \ldots, x_n$ comme les coordonnées d'un point M, la transformation (1) fait passer, suivant une loi déterminée, d'un point quelconque M de l'espace à un autre point M′. Les transformations sont d'un usage courant en Géométrie (homothétie, similitude, inversion, ou, plus simplement encore, rotation, translation, etc.).

La transformation (1) est dite *identique* lorsque les seconds membres se réduisent respectivement à $x_1, \ldots, x_n$; tout point est alors transformé en lui-même.

Etant donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{2}$$

ce système est dit *admettre la transformation* (1) lorsque cette transformation, appliquée aux différents points d'une courbe intégrale *quelconque* de (2), donne des points appartenant tous à une même nouvelle courbe intégrale.

Considérons une transformation dépendant d'un paramètre a et se réduisant, pour une certaine valeur numérique a_0 de ce paramètre, à la transformation identique. Posons $a - a_0 = \varepsilon$ et supposons que les seconds membres soient développables suivant les puissances de ε

$$x_i' = x_i + \varepsilon\xi_i(x_1, \ldots, x_n) + \ldots$$

On aura ce qu'on appelle une *transformation infinitésimale* en ne portant

son attention que sur les termes du premier ordre en ε. Une transformation infinitésimale est donc complètement définie par n fonctions ξ_i de $x_1, \ldots, x_n$; on obtient la même transformation infinitésimale en multipliant toutes ces fonctions par un même facteur constant. Nous dirons que la fonction ξ_i représente l'accroissement de la variable x_i par la transformation infinitésimale (en réalité l'accroissement est $\varepsilon\xi_i$, mais le coefficient ε ne joue qu'un rôle accessoire).

Etant donnée une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$, l'accroissement que la transformation infinitésimale fait subir à cette fonction est, au facteur ε près, le premier terme du développement de

$$f(x_1', \ldots, x_n') - f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 + \varepsilon\xi_1, \ldots, x_n + \varepsilon\xi_n) - f(x_1, \ldots, x_n);$$

c'est donc

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

nous désignerons cette expression par le symbole $\mathrm{A}f$:

$$\mathrm{A}f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}; \tag{3}$$

nous conviendrons de dire que $\mathrm{A}f$ *est le symbole de la transformation infinitésimale considérée.*

86. La formule (3) est analogue à celle qui donne la différentielle totale d'une fonction f :

$$\delta f = \delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

La seule différence est que δ est le symbole d'une opération *indéterminée*, tandis que A est le symbole d'une opération *déterminée*. Le symbole de la différentiation devient le symbole d'une transformation infinitésimale dès qu'on donne à $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ des valeurs déterminées (fonctions données des variables).

L'opération symbolisée par A est susceptible de s'appliquer non seulement aux fonctions finies, mais encore aux formes différentielles. Nous entendrons par exemple par $\mathrm{A}(dx_i)$ la partie principale (divisée par ε) de l'accroissement de dx_i. Or l'on a

$$dx_i' - dx_i = \varepsilon d\xi_i + \ldots;$$

on est donc conduit à poser

$$\mathrm{A}(dx_i) = d\xi_i = d(\mathrm{A}x_i).$$

On voit par là que *l'opération* A *doit être considérée comme échangeable avec l'opération de différentiation* (indéterminée).

87. Revenons au système d'équations différentielles (2). Ce système sera dit admettre la transformation infinitésimale (3) si cette transformation, appliquée aux différents points d'une courbe intégrale quelconque, donne des

points tous situés, *aux infininiment petits près du second ordre*, sur une même nouvelle courbe intégrale.

Il est bien évident que si les équations (2) admettent une transformation dépendant d'un paramètre a, et cela quelle que soit la valeur numérique de ce paramètre, elles admettront la transformation infinitésimale qui correspond à des valeurs de a infiniment voisines de la valeur a_0 (si elle existe) qui fournit la transformation identique.

Si y est une intégrale première des équations (2) et si ces équations (2) admettent la transformation infinitésimale Af, il est clair que $A(y)$ sera encore une intégrale première. En effet en tout point M d'une courbe intégrale quelconque (C), y garde une même valeur numérique c; au point M′ transformé de M, la fonction y augmente de $\varepsilon A(y)$: cette augmentation doit être la même, quel que soit le point M de (C); il faut donc que $A(y)$ ait la même valeur numérique en tous les points de (C); autrement dit $A(y)$ est une intégrale première.

Réciproquement si l'opération A, appliquée à une intégrale première quelconque, donne encore une intégrale première, le système (2) admet la transformation infinitésimale Af. Si en effet

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1}$$

sont les valeurs numériques constantes que prennent $n-1$ intégrales premières indépendantes

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$$

aux différents points M d'une courbe intégrale (C), les valeurs que prennent ces intégrales aux points transformés M′ sont celles que prennent aux points M eux-mêmes les fonctions

$$y_1+\varepsilon A(y_1),\ y_2+\varepsilon A(y_2),\ \ldots,\ y_{n-1}+\varepsilon A(y_{n-1});$$

ce sont donc des *constantes*. Par suite les points M′ engendrent bien une courbe intégrale.

II. — *Formation d'invariants intégraux en partant de transformations infinitésimales.*

88. La propriété précédente nous montre que *la connaissance d'une transformation infinitésimale Af admise par les équations différentielles* (2) *permet de déduire de toute forme différentielle invariante Ω une autre forme invariante, à savoir* $A(\Omega)$. Si la forme Ω est extérieure, il en est de même de la forme $A(\Omega)$, et la nouvelle forme a le même degré que l'ancienne.

Il existe une seconde opération permettant de déduire de la forme extérieure invariante Ω une autre forme invariante. Supposons, pour fixer les idées, Ω du troisième degré et considérons la forme différentielle trilinéaire correspondante $\Omega(\delta,\ \delta',\ \delta'')$. Remplaçons dans cette forme le symbole de

différentiation indéterminée δ par le symbole de la transformation infinitésimale; nous obtenons une forme linéaire alternée $\Omega(A, \delta', \delta'')$ à deux séries de différentielles δ', δ'', à laquelle correspond enfin une forme quadratique extérieure, que nous désignerons par $\Omega(A, \delta)$. Cette nouvelle forme se déduit de la première par une opération qui a un sens indépendant du choix des variables. Si Ω est exprimée au moyen des intégrales premières y_i des équations (2) et de leurs différentielles, l'expression $\Omega(A, \delta)$ s'exprime aussi au moyen des y_i et des δy_i. Par conséquent *l'opération qui vient d'être définie permet de déduire de toute forme invariante une autre forme invariante dont le degré est diminué d'une unité.*

On a du reste

$$(4) \qquad \Omega(A, \delta) = \xi_1 \frac{\partial \Omega}{\partial(\delta x_1)} + \xi_2 \frac{\partial \Omega}{\partial(\delta x_2)} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \Omega}{\partial(\delta x_n)}.$$

89. Les deux nouvelles opérations qui viennent d'être définies ne sont pas indépendantes entre elles. Supposons, pour fixer les idées, que Ω soit du second degré et reprenons la formule de définition de la dérivée extérieure Ω'. On a (n° **71**)

$$\Omega'(\delta, \delta', \delta'') = \delta\Omega(\delta', \delta'') - \delta'\Omega(\delta, \delta'') + \delta''\Omega(\delta, \delta'),$$

à la seule condition que les trois symboles δ, δ', δ'' soient échangeables entre eux. Remplaçons le symbole δ par celui de la transformation infinitésimale Af. Nous aurons

$$\Omega'(A, \delta', \delta'') = A(\Omega(\delta', \delta'')) - \delta'\Omega(A, \delta'') + \delta''\Omega(A, \delta'),$$

c'est-à-dire, en repassant aux formes extérieures,

$$\Omega'(A, \delta) = A(\Omega(\delta)) - [\Omega(A, \delta)]',$$

ou enfin

$$(5) \qquad A(\Omega(\delta)) = \Omega'(A, \delta) + [\Omega(A, \delta)]'.$$

Cette formule fondamentale contient au premier membre le résultat de la première opération effectuée sur Ω. Quant aux deux termes du second membre, le premier s'obtient en appliquant à Ω, d'abord l'opération de la dérivation extérieure, ensuite la seconde opération associée à Af; quant au second terme il se déduit de Ω par les mêmes opérations, mais effectuées dans l'ordre inverse.

En définitive *la connaissance d'une transformation infinitésimale Af qu'admettent les équations* (2) *nous met en possession d'une opération essentiellement nouvelle, définie par la formule* (4), *permettant de déduire d'une forme invariante $\Omega(\delta)$ une nouvelle forme invariante $\Omega(A, \delta)$.*

Nous pouvons remarquer en particulier que si y est une intégrale première, l'intégrale première $A(y)$ peut être obtenue, d'abord par différentiation, ce qui donne $\omega(\delta) = \delta y$, puis par application de l'opération (4), ce qui donne

$$\omega(A) = A(y).$$

III. — *Exemples.*

90. Considérons un milieu matériel continu en mouvement, la densité étant ρ et les composantes de la vitesse u, v, w. Les équations différentielles du mouvement d'une molécule

(6) $$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w,$$

admettent, comme nous l'avons vu (nº **37**), l'invariant intégral

$$\iiint \rho(\delta x \delta y \delta z - u \delta y \delta z \delta t - v \delta z \delta x \delta t - w \delta x \delta y \delta t)$$

qui correspond à la forme invariante

$$\Omega = \rho[\delta x \delta y \delta z] - \rho u[\delta y \delta z \delta t] - \rho v[\delta z \delta x \delta t] - \rho w[\delta x \delta y \delta t].$$

Supposons le mouvement *permanent*, c'est-à-dire ρ, u, v, w indépendants de t. Les équations (6) ne contenant pas le temps explicitement, c'est-à-dire ne changeant pas quand on change t en $t + \varepsilon$, admettent la transformation infinitésimale

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Par suite elles admettent la forme invariante

$$\Omega(A, \delta) = \frac{\partial \Omega}{\partial(\delta t)} = -\rho u[\delta y \delta z] - \rho v[\delta z \delta x] - \rho w[\delta x \delta y].$$

La propriété de cette forme d'être invariante est évidente physiquement. Considérons en effet un *tube* de trajectoires et coupons ce tube par deux surfaces quelconques, qui déterminent à l'intérieur du tube deux aires S et S'. La quantité de matière qui remplit le volume situé entre la surface latérale du tube et les deux surfaces S et S' est toujours la même, par suite le flux algébrique de matière à travers la surface qui limite ce volume est nul. Or le flux à travers la surface latérale est nul. On a donc

$$\iint_S \rho(u \delta y \delta z + v \delta z \delta x + w \delta x \delta y) = \iint_{S'} \rho(u \delta y \delta z + v \delta z \delta x + w \delta x \delta y).$$

Remarquons que la forme invariante $\Omega(A, \delta)$ est une dérivée exacte ; sa dérivée en effet, si elle n'était pas nulle, ne pourrait différer de Ω que par un facteur fini ; or cette dérivée ne contient pas δt ; on a donc

$$[\Omega(A, \delta)]' = 0.$$

Le système caractéristique de $\Omega(A, \delta)$ se réduit par suite à son système associé ; il est donné par les équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w};$$

il définit les trajectoires des molécules, mais indépendamment de la manière dont ces trajectoires sont parcourues avec le temps.

La formule (5) montre aussi la propriété de la forme $\Omega(A, \delta)$ d'avoir sa dérivée nulle ; en effet ici la forme Ω' est identiquement nulle. D'autre part, Ω, ne contenant pas t explicitement, ne change pas quant on change t en $t + \varepsilon$, par suite $A(\Omega)$ est nulle. Cette remarque s'appliquera aux exemples suivants.

91. Considérons maintenant un fluide parfait en mouvement sous l'action de forces dérivant d'un potentiel. Nous avons vu (n° 22) l'existence d'une forme invariante absolue

$$\omega' = \xi[\delta y \delta z] + \eta[\delta z \delta x] + \zeta[\delta x \delta y] + (\eta w - \zeta v)[\delta x \delta t] + (\zeta u - \xi w)[\delta y \delta t] + (\xi v - \eta u)[\delta z \delta t];$$

elle provenait de la dérivation extérieure d'une forme linéaire

$$\omega = u\delta x + v\delta y + w\delta z - E\delta t,$$

où le coefficient E, énergie par unité de masse, avait pour expression

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - U + \int \frac{dp}{\rho}.$$

Supposons le mouvement *permanent*, c'est-à-dire u, v, w, p, ρ indépendants de t. On aura, là encore, une nouvelle forme invariante

$$\omega'(A, \delta) = \frac{\partial \omega'}{\partial(\delta t)} = (v\zeta - w\eta)\delta x + (w\xi - u\zeta)\delta y + (u\eta - v\xi)\delta z = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

En partant de l'expression

$$\omega' = [\delta u \delta x] + [\delta v \delta y] + [\delta w \delta z] - [\delta E \delta t],$$

on trouve d'autre part

$$\omega'(A, \delta) = \delta E.$$

Par suite E est une intégrale première des équations du mouvement : nous retrouvons *le théorème de Bernoulli* d'après lequel, dans un fluide parfait en mouvement permanent, la quantité

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - U + \int \frac{dp}{\rho}$$

reste constante le long de chaque filet fluide.

Mais la forme δE n'est pas seulement invariante pour les équations différentielles du mouvement des molécules fluides : elle l'est aussi pour les équations différentielles des lignes de tourbillon qui admettent aussi la forme invariante ω' ; par suite *la quantité* E *reste constante non seulement le long de chaque filet fluide, mais aussi le long de chaque ligne de tourbillon.*

Si le mouvement est irrotationnel, la forme $\omega'(A, \delta)$, telle qu'elle a d'abord été écrite, est évidemment identiquement nulle : dans ce cas l'énergie est constante dans toute la masse fluide et à tout instant.

L'égalité

$$\delta E = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

permet de représenter en chaque point M la variation (spatiale) d'énergie au moyen d'un vecteur MH ayant pour origine ce point et qui serait le produit vectoriel du vecteur vitesse (u, v, w) et du vecteur tourbillon (ξ, η, ζ) ; la dérivée de l'énergie suivant une direction donnée serait égale à la projection du vecteur MH sur cette direction.

92. Une autre application très générale est relative au problème de la Dynamique, lorsque les liaisons et les forces données sont indépendantes du temps. La transformation infinitésimale $Af = \frac{\partial f}{\partial t}$ qu'admettent les équations du mouvement permet de déduire de l'invariant intégral fondamental de la Dynamique

$$\iint \omega' = \iint \sum \delta p_i \delta q_i - \delta H \delta t$$

le nouvel invariant intégral

$$\int \delta H$$

obtenu par dérivation partielle par rapport à δt. On obtient ainsi l'*intégrale de l'énergie généralisée*

$$H = h,$$

sous la seule condition que la fonction H *soit indépendante du temps.*

Plus généralement supposons que la fonction H ne contienne pas une des variables p_i *et* q_i, soit par exemple q_n. Les équations du mouvement admettent alors la transformation infinitésimale $\frac{\partial f}{\partial q_n}$, d'où on déduit la forme linéaire invariante

$$\frac{\partial \omega'}{\partial(\delta q_n)} = -\delta p_n ;$$

donc si la fonction H ne contient pas une des variables canoniques, la variable conjuguée est une intégrale première des équations du mouvement.

IV. — *Applications au problème des n corps.*

93. Considérons n points matériels s'attirant mutuellement suivant des forces proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles à une puissance donnée de leur distance. Il existe une fonction des forces

$$U = f \sum_{i, j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^p},$$

l'exposant p étant donné (égal à 1 dans le cas de la Mécanique céleste), la quantité r_{ij} désignant la distance des deux points M_i et M_j de masses m_i et m_j.

Les équations du mouvement du système admettent un certain nombre de transformations infinitésimales évidentes. D'abord le temps n'entre pas explicitement dans ces équations. En outre, de toute solution du problème on en déduit une autre par un déplacement d'ensemble dans l'espace, et aussi en communiquant à chacun des n points un mouvement rectiligne et uniforme supplémentaire (le même pour tous les points). On déduit immédiatement de là l'existence des transformations infinitésimales

$$A_0 f = \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$A_1 f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad A_2 f = \sum \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad A_3 f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i},$$

$$A_4 f = \sum y_i \frac{\partial f}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + y'_i \frac{\partial f}{\partial z'_i} - z'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i}, \quad A_5 f = \ldots, \quad A_6 f = \ldots,$$

$$A_7 f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x'_i} + t \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad A_8 f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} + t \frac{\partial f}{\partial y_i} \right), \quad A_9 f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial z'_i} + t \frac{\partial f}{\partial z_i} \right).$$

La transformation $A_1 f$ correspond à une translation parallèle à Ox, la transformation $A_4 f$ à une rotation autour de Ox, la transformation $A_7 f$ à un mouvement supplémentaire de vitesse constante ε parallèle à Ox.

On peut enfin indiquer une dernière transformation infinitésimale fondée sur des considérations d'homogénéité. Les équations

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

restent en effet inaltérées si on multiplie toutes les coordonnées x_i, y_i, z_i par un même facteur constant λ, à condition de multiplier t par $\lambda^{1+\frac{p}{2}}$; les composantes x'_i, y'_i, z'_i des vitesses sont alors multipliées par $\lambda^{-\frac{p}{2}}$. En prenant $\lambda = 1 + \varepsilon$, on arrive à la nouvelle transformation infinitésimale

$$A_{10} f = \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} - \frac{p}{2} \left(x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i} + y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} + z'_i \frac{\partial f}{\partial z'_i} \right) + \left(1 + \frac{p}{2} \right) t \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Remarquons que, d'après la définition même de U, on a

$$A_0 U = A_1 U = \ldots = A_9 U = 0, \quad A_{10} U = -pU.$$

94. Rappelons l'invariant intégral fondamental du second degré

$$\omega' = \sum m_i[\delta x'_i \delta x_i] + m_i[\delta y'_i \delta y_i] + m_i[\delta z'_i \delta z_i] - \Big[\sum m_i(x'_i\delta x'_i + y'_i\delta y'_i + z'_i\delta z'_i)\delta t\Big] + [\delta U \delta t].$$

Désignons par ω_i la forme linéaire $\omega'(A_i, \delta)$. Il existe onze formes linéaires invariantes $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{10}$. Il est facile de voir *a priori*, d'après la formule (5), que les dix premières sont des différentielles exactes, car ω' ne change pas par l'une quelconque des dix premières transformations infinitésimales. Quant à ω_{10}, la formule (5) donne

$$(\omega_{10})' = A_{10}(\omega');$$

or ω' a un degré d'homogénéité (au sens défini plus haut) égal à $1 - \frac{p}{2}$; on a donc

$$(\omega_{10})' = \left(1 - \frac{p}{2}\right)\omega',$$

et ω_{10} ne sera une différentielle exacte que si $p = 2$, c'est-à-dire *si l'attraction se fait proportionnellement au cube de la distance.*

Le calcul des onze formes ω_i n'offre aucune difficulté et donne

$$\omega_0 = \sum m_i(x'_i\delta x'_i + y'_i\delta y'_i + z'_i\delta z'_i) - \delta U = \delta H,$$

$$\omega_1 = -\sum m_i \delta x'_i = \delta H_1,$$

$$\omega_2 = -\sum m_i \delta y'_i = \delta H_2,$$

$$\omega_3 = -\sum m_i \delta z'_i = \delta H_3,$$

$$\omega_4 = \sum m_i(z_i\delta y'_i - y_i\delta z'_i + y'_i\delta z_i - z'_i\delta y_i) = \delta H_4,$$

$$\omega_5 = \sum m_i(x_i\delta z'_i - z_i\delta x'_i + z'_i\delta x_i - x'_i\delta z_i) = \delta H_5,$$

$$\omega_6 = \sum m_i(y_i\delta x'_i - x_i\delta y'_i + x'_i\delta y_i - y'_i\delta x_i) = \delta H_6,$$

$$\omega_7 = \sum m_i(\delta x_i - t\delta x'_i - x'_i\delta t) = \delta H_7,$$

$$\omega_8 = \sum m_i(\delta y_i - t\delta y'_i - y'_i\delta t) = \delta H_8,$$

$$\omega_9 = \sum m_i(\delta z_i - t\delta z'_i - z'_i\delta t) = \delta H_9,$$

$$\omega_{10} = -\sum m_i\left(x_i\delta x'_i + y_i\delta y'_i + z_i\delta z'_i + \frac{p}{2}x'_i\delta x_i + \frac{p}{2}y'_i\delta y_i + \frac{p}{2}z'_i\delta z_i\right) + \left(1 + \frac{p}{2}\right)t\delta H + pH\delta t;$$

on a posé

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - U,\\
H_1 &= -\sum m_i x_i',\\
H_2 &= -\sum m_i y_i',\\
H_3 &= -\sum m_i z_i',\\
H_4 &= -\sum m_i(y_i z_i' - z_i y_i'),\\
H_5 &= -\sum m_i(z_i x_i' - x_i z_i'),\\
H_6 &= -\sum m_i(x_i y_i' - y_i x_i'),\\
H_7 &= \sum m_i(x_i - t x_i'),\\
H_8 &= \sum m_i(y_i - t y_i'),\\
H_9 &= \sum m_i(z_i - t z_i').
\end{aligned}
$$

On vérifie facilement que le covariant bilinéaire de ω_{10} est égal à $\left(1 - \frac{p}{2}\right)\omega'$. Si $p = 2$, on a la nouvelle intégrale première

$$\sum m_i(x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') - 2Ht = C,$$

qui donne, en intégrant,

$$\sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2Ht^2 + 2Ct + C' :$$

c'est l'*intégrale de Jacobi*.

Les intégrales premières H_1, H_2, H_3, H_7, H_8, H_9 sont celles que fournit le théorème du centre de gravité; les intégrales premières H_4, H_5, H_6 sont celles que fournit la loi des aires.

95. Nous n'avons obtenu *directement*, dans le numéro précédent, que les *différentielles* des intégrales premieres H_i et non ces intégrales elles-mêmes. Elles vont nous être données elles-mêmes en appliquant à chacune des formes invariantes ω_i l'opération correspondant à la transformation infinitésimale $A_j f$. Nous obtiendrons ainsi des *fonctions* invariantes, c'est-à-dire des intégrales premières

$$\alpha_{ij} = \omega_i(A_j) = \omega'(A_i, A_j) = -\alpha_{ji}$$

que nous allons écrire suivant un tableau à double entrée qui sera manifestement symétrique gauche. Les calculs n'offrent aucune difficulté : la quantité α_{ij} se trouve à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. La lettre M désigne la somme des masses des n corps.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	$-pH$
1	o	o	o	o	o	H	$-H_2$	$-M$	o	o	$-\frac{p}{2}H_1$
2	o	o	o	o	$-H_3$	o	H_1	o	$-M$	o	$-\frac{p}{2}H_2$
3	o	o	o	o	H_2	$-H_1$	o	o	o	$-M$	$-\frac{p}{2}H_3$
4	o	o	H_3	$-H_2$	o	H_6	$-H_5$	o	H_9	$-H_8$	$(1-\frac{p}{2})H_4$
5	o	$-H_3$	o	H_1	$-H_6$	o	H_4	$-H_9$	o	H_7	$(1-\frac{p}{2})H_5$
6	o	H_2	$-H_1$	o	H_5	$-H_4$	o	H_8	$-H_7$	o	$(1-\frac{p}{2})H_6$
7	o	M	o	o	o	H_9	$-H_8$	o	o	o	H_7
8	o	o	M	o	$-H_9$	o	H_7	o	o	o	H_8
9	o	o	o	M	H_8	$-H_7$	o	o	o	o	H_9
10	pH	$\frac{p}{2}H_1$	$\frac{p}{2}H_2$	$\frac{p}{2}H_3$	$(\frac{p}{2}-1)H_4$	$(\frac{p}{2}-1)H_5$	$(\frac{p}{2}-1)H_6$	$-H_7$	$-H_8$	$-H_9$	o

Il est à remarquer que le déterminant des éléments du tableau précédent est nul, puisque c'est un déterminant symétrique gauche de degré impair. Il existe donc onze coefficients λ_i non tous nuls tels que l'expression $\sum \lambda_i \omega_i$ devienne nulle quand on lui applique l'opération relative à l'une quelconque des transformations $A_i f$. On voit facilement que λ_{10} est nul. Le calcul donne pour l'expression $\sum \lambda_i \omega_i$, qui n'est définie qu'à un facteur près,

$$\frac{\delta K}{K} + \frac{2-p}{p}\frac{\delta H}{H},$$

en posant

$$K = (MH_4 + H_2H_9 - H_3H_8)^2 + (MH_5 + H_3H_7 - H_1H_9)^2 + (MH_6 + H_1H_8 - H_2H_7)^2.$$

Dans le cas de la Mécanique céleste, $p = 1$; l'expression $\frac{\delta K}{K} + \frac{\delta H}{H}$ est la différentielle logarithmique de HK. Cette quantité HK est donc invariante par toutes les transformations $A_i f$. Il est dès lors facile d'avoir son interprétation en choisissant convenablement les axes de coordonnées. En prenant pour origine le centre de gravité, ce qui est permis puisqu'il est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, on voit que H_1, H_2, H_3, H_7, H_8, H_9 s'annulent. La quantité invariante est alors, à un facteur constant près, $H(H_4^2 + H_5^2 + H_6^2)$, c'est-à-dire *le produit du carré du moment cinétique du système dans son mouvement autour du centre de gravité par l'énergie totale du système dans ce même mouvement*. Cette quantité est visiblement en effet indépendante du choix des axes et du choix des unités.

V. — *Application à la Cinématique du corps solide.*

96. Considérons le mouvement d'un corps solide rapporté à trois axes rectangulaires fixes. On sait qu'à chaque instant il est défini par un système de vecteurs de résultante générale (p, q, r) et de moment par rapport à l'origine (ξ, η, ζ). Supposons que ces six quantités soient des fonctions données du temps. Les équations différentielles du mouvement d'un point du corps solide sont

$$\frac{dx}{dt} = \xi + qz - ry = X,$$

$$\frac{dy}{dt} = \eta + rx - pz = Y,$$

$$\frac{dz}{dt} = \zeta + py - qx = Z.$$

Ces équations admettent un invariant intégral évident. Si en effet on considère à l'instant t deux points infiniment voisins

$$(x, y, z), \qquad (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$$

du corps solide, la distance de ces deux points ne varie pas avec le temps. On a donc une forme différentielle

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2$$

qui est invariante si on ne considère que des points au même instant, et qui devient invariante d'une manière absolue si on la complète en remplaçant respectivement

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z$$

par

$$\delta x - X\delta t, \qquad \delta y - Y\delta t, \qquad \delta z - Z\delta t.$$

Soit

$$F = (\delta x - X\delta t)^2 + (\delta y - Y\delta t)^2 + (\delta z - Z\delta t)^2$$

cette forme invariante, à laquelle correspond la forme bilinéaire invariante

$$F(\delta, \delta') = (\delta x - X\delta t)(\delta' x - X\delta' t) + (\delta y - Y\delta t)(\delta' y - Y\delta' t) + (\delta z - Z\delta t)(\delta' z - Z\delta' t).$$

Cette forme bilinéaire n'est pas alternée, mais *symétrique*; néanmoins les raisonnements faits au n° 88 restent valables.

Supposons $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ *constants*; les équations différentielles du mouvement admettent alors la transformation infinitésimale

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t};$$

par suite de la forme F on peut déduire une autre forme invariante

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial(\delta t)} = -X(\delta x - X\delta t) - Y(\delta y - Y\delta t) - Z(\delta z - Z\delta t).$$

Le même procédé peut être ici répété et donne cette fois une intégrale première

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial(\delta t)^2} = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Cette intégrale première est évidente géométriquement. Le mouvement du corps solide est hélicoïdal, et l'intégrale précédente est égale au carré de la vitesse du point considéré, vitesse qui reste bien égale à elle-même pendant toute la durée du mouvement.

VI. — *Equations différentielles admettant une transformation infinitésimale.*

97. Dans les exemples précédents nous supposions connu un invariant intégral. Supposons maintenant qu'on connaisse seulement une *équation* invariante, par exemple l'équation

$$\omega(\delta) \equiv a_1\delta x_1 + a_2\delta x_2 + \ldots + a_n\delta x_n = 0.$$

Dire que cette équation est invariante, c'est dire qu'elle peut s'écrire de manière à ne contenir que les intégrales premières $y_1, \ldots, y_{n-1}$ des équations différentielles données et leurs différentielles ; autrement dit on a

$$\omega(\delta) \equiv \rho[b_1(y)\delta y_1 + b_2(y)\delta y_2 + \ldots + b_{n-1}(y)\delta y_{n-1}],$$

les b_i ne dépendant que de $y_1, \ldots, y_{n-1}$ et ρ étant une fonction quelconque. Remplaçons le symbole de différentiation indéterminée δ par le symbole de la transformation infinitésimale Af. On a immmédiatement

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(A)} = \frac{b_1(y)\delta y_1 + b_2(y)\delta y_2 + \ldots + b_{n-1}(y)\delta y_{n-1}}{b_1(y)Ay_1 + b_2(y)Ay_2 + \ldots + b_{n-1}(y)Ay_{n-1}},$$

et le second membre est manifestement une *forme linéaire invariante.*

La connaissance d'une transformation infinitésimale Af *qu'admet un système d'équations différentielles données et la connaissance d'une équation de Pfaff* $\omega(\delta) = 0$ *invariante pour ce système entraîne la connaissance d'un invariant intégral linéaire* $\int \frac{\omega(\delta)}{\omega(A)}$.

Supposons par exemple qu'on ait affaire à une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y};$$

elle est invariante pour elle-même ; par suite si elle admet une transformation infinitésimale

$$Af = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

elle admet par cela même la forme linéaire invariante

$$\frac{X\delta y - Y\delta x}{X\eta - Y\xi};$$

comme ici il y a une seule intégrale première, cette forme est nécessairement une différentielle exacte. Autrement dit on connaît un facteur intégrant de l'équation. C'est un résultat classique.

La plupart des équations différentielles qu'on sait intégrer peuvent se rattacher à la remarque précédente. Il en est ainsi des équations

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad \frac{dy}{dx} = f(y), \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

la dernière de ces équations, par exemple, ne change pas si on multiplie x et y par un même facteur constant $1 + \varepsilon$; elle admet donc la transformation infinitésimale

$$Af = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y};$$

par suite l'expression

$$\frac{dy - f\left(\frac{y}{x}\right)dx}{y - f\left(\frac{y}{x}\right)x}$$

est une différentielle exacte. Cette propriété devient évidente si on pose

$$y = ux,$$

car alors l'expression devient

$$\frac{du}{u - f(u)} + \frac{dx}{x}.$$

L'intégration de cette différentielle exacte conduit aux mêmes calculs que la méthode classique.

98. Enfin, même si on ne sait rien *a priori* sur un système d'équations différentielles données, la connaissance d'une transformation infinitésimale qu'admet ce système permet d'obtenir un système de Pfaff invariant. Cherchons en effet toutes les équations de Pfaff $\omega = 0$ qui sont des conséquences des équations différentielles données et telles que $\omega(A)$ soit nul. Si on pose

$$\omega(\delta) = \lambda_1\delta x_1 + \lambda_2\delta x_2 + \ldots + \lambda_n\delta x_n,$$

les coefficients λ_i sont donnés par les deux conditions

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0,$$
$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n = 0.$$

L'ensemble des équations cherchées forme donc un système de Pfaff obtenu en annulant tous les déterminants à trois lignes et trois colonnes du tableau

$$\left\|\begin{matrix} \delta x_1 & \delta x_2 \ldots \delta x_n \\ X_1 & X_2 \ldots X_n \\ \xi_1 & \xi_2 \ldots \xi_n \end{matrix}\right\|.$$

Ce système a une signification indépendante du choix des variables. Or si on prenait pour variables $n - 1$ intégrales premières $y_1, \ldots, y_{n-1}$ et une $n^{\text{ième}}$ variable, x_n par exemple, les équations se réduiraient à

$$\frac{\partial y_1}{\eta_1} = \frac{\partial y_2}{\eta_2} = \ldots = \frac{\partial y_{n-1}}{\eta_{n-1}} \qquad (\eta_i = \mathrm{A}y_i).$$

Le système de Pfaff considéré est donc invariant, et manifestement il est complètement intégrable, puisqu'il se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires en $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Par exemple si les équations

$$\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}} = \frac{dz}{\mathrm{Z}}$$

admettent la transformation infinitésimale

$$\mathrm{A}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

l'équation aux différentielles totales

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0$$

est complètement intégrable. En l'intégrant, on obtiendrait une intégrale première des équations données. En égalant enfin cette intégrale première à une constante, on serait ramené à une équation différentielle ordinaire admettant une transformation infinitésimale connue, qui s'intégrerait par une quadrature.

VIII. — *Exprimer qu'un système d'équations différentielles données admet une transformation infinitésimale donnée.*

99. Nous n'avons pas encore indiqué les conditions analytiques exprimant qu'un système d'équations différentielles données

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{\mathrm{X}_1} = \frac{dx_2}{\mathrm{X}_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\mathrm{X}_n}$$

admet une transformation infinitésimale donnée

$$(3) \qquad \mathrm{A}f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Posons

$$(5) \qquad \mathrm{X}f = \mathrm{X}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathrm{X}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \mathrm{X}_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Il s'agit au fond d'exprimer que si f est une intégrale première, c'est-à-dire satisfait à l'équation

$$Xf = 0,$$

Af est aussi une intégrale première ; autrement dit, il s'agit d'exprimer que l'équation

$$X(Af) = 0$$

est une conséquence de l'équation

$$Xf = 0.$$

Nous pouvons substituer à la première équation, *qui contient les dérivées partielles du second ordre de f*, l'équation

$$X(Af) - A(Xf) = 0$$

qui, comme un calcul facile le montre, est linéaire et homogène par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$. *La condition cherchée est donc* tout simplement *l'existence d'une identité de la forme*

$$X(Af) - A(Xf) = \rho Xf, \tag{7}$$

ρ désignant un coefficient convenablement choisi.

Cette condition est visiblement vérifiée si l'on prend la transformation infinitésimale dont le symbole est Xf ; cette transformation déplace chaque point M de l'espace sur la courbe intégrale passant par ce point ; elle laisse donc invariante chaque courbe intégrale. Si on porte son attention sur l'effet produit sur les courbes intégrales, considérées comme des êtres indivisibles, cette transformation infinitésimale particulière joue le même rôle que la transformation *identique*. On vérifiera facilement que les applications des transformations infinitésimales faites dans ce Chapitre *s'évanouissent* dans ce cas particulier. La même remarque s'appliquerait à la transformation infinitésimale λXf, où λ est un facteur arbitrairement donné.

VIII. — *Equations aux variations.*

100. La notion d'équation aux variations est due à H. Poincaré ; on peut la relier à la notion de transformation infinitésimale.

Considérons un système d'équations différentielles que nous écrirons

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n, \tag{8}$$

les seconds membres étant des fonctions données de $x_1, \ldots, x_n, t$. Soit

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ldots, x_n = f_n(t) \tag{9}$$

une solution particulière de ce système. Prenons une solution infiniment voisine

$$x_1 = f_1(t) + \varepsilon\xi_1, \quad x_2 = f_2(t) + \varepsilon\xi_2, \ \ldots, \ x_n = f_n(t) + \varepsilon\xi_n,$$

où ε est une constante infiniment petite et les ξ des fonctions inconnues de t. En négligeant les infiniment petits du second ordre, nous obtenons, pour définir ces fonctions inconnues, les équations

$$(10) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial X_i}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n}\xi_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ce sont les équations aux variations *relatives à la solution particulière considérée*.

Il peut se faire qu'on connaisse une solution particulière des équations aux variations, *indépendamment de la solution particulière des équations données qui a servi à former ces équations aux variations*. Les quantités $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont alors en réalité des fonctions déterminées de $x_1, \ldots, t$, satisfaisant aux équations aux dérivées partielles

$$(11) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + X_1 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_n} = \xi_1 \frac{\partial X_i}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial X_i}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial X_i}{\partial x_n}.$$

Dans ce cas les équations données admettent manifestement la transformation infinitésimale

$$Af = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

cette transformation a en effet pour équations

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \varepsilon\xi_1, \\ &\cdots\cdots \\ x'_n &= x_n + \varepsilon\xi_n, \\ t' &= t; \end{aligned}$$

la courbe transformée de la courbe intégrale (9) a pour équations

$$x_i + \varepsilon\xi_i = f_i(t)$$

ou

$$x_i = f_i(t) - \varepsilon\xi_i;$$

c'est encore une courbe intégrale puisque $(-\xi_1, \ldots, -\xi_n)$ constituent une solution des équations aux variations.

Plus généralement *à toute solution* (ξ_i) *des équations* (11) *correspondent une infinité de transformations infinitésimales laissant le système donné* (8) *invariant*, à savoir les transformations

$$(12) \quad Bf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial t} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

avec une fonction arbitraire λ.

Réciproquement supposons qu'on connaisse une transformation infinitésimale laissant le système donné invariant : elle peut toujours se mettre sous

la forme (12). La courbe intégrale (9) est changée par cette transformation dans la courbe

$$x_i + \varepsilon\xi_i + \varepsilon\lambda X_i = f_i(t + \varepsilon\lambda)$$

ou

$$x_i = f_i(t) - \varepsilon\xi_i + \varepsilon\lambda[f_i'(t) - X_i] = f_i(t) - \varepsilon\xi_i;$$

par conséquent les équations aux variations (11) admettent la solution $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Toutes ces propriétés résultent du reste de ce que les équations (11) ne font que traduire analytiquement la relation (7) lorsque, dans Af, le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial t}$ est nul.

CHAPITRE X.

LES SYSTÈMES DE PFAFF COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES.

I. — *Le théorème de Frobenius.*

101. Un système de h équations de Pfaff

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_1 \equiv a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + \ldots + a_{1n}dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_h \equiv a_{h1}dx_1 + a_{h2}dx_2 + \ldots + a_{hn}dx_n = 0 \end{cases}$$

est complètement intégrable lorsqu'il peut se mettre sous la forme

$$(2)\qquad dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_h = 0.$$

S'il en est ainsi chacune des formes ω_i est linéaire en $dy_1, \ldots, dy_h$, et par suite sa dérivée ω_i' s'annule en tenant compte de (2), c'est-à-dire de (1).

Pour qu'un système de Pfaff soit complètement intégrable il faut que les dérivées de ses premiers membres s'annulent toutes en tenant compte des équations du système.

Pour démontrer la réciproque, remarquons d'abord que la propriété que nous venons d'énoncer ne dépend pas du choix des variables et ne dépend pas non plus du choix des r premiers membres : autrement dit, si l'on écrit les équations du système sous la forme

$$\begin{aligned} \varpi_1 &\equiv \alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{12}\omega_2 + \ldots + \alpha_{1h}\omega_h = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi_h &\equiv \alpha_{h1}\omega_1 + \alpha_{h2}\omega_2 + \ldots + \alpha_{hh}\omega_h = 0, \end{aligned}$$

les dérivées $\varpi_1', \varpi_2', \ldots, \varpi_h'$ s'annulent aussi en tenant compte des équations du système : on a en effet

$$\varpi_i' = \alpha_{i1}\omega_1' + \alpha_{i2}\omega_2' + \ldots + \alpha_{ih}\omega_h' + [d\alpha_{i1}\omega_1] + [d\alpha_{i2}\omega_2] + \ldots + [d\alpha_{ih}\omega_h]$$

et chacun des termes du second membre s'annule par hypothèse dans les conditions indiquées.

Cela posé, supposons que la réciproque soit démontrée jusqu'à $n - 1$ variables, et démontrons-la pour n variables. Les ω_i' s'annulant en tenant compte des équations (1), s'annuleront à plus forte raison si on fait en outre $dx_n = 0$; par suite, *si on regarde x_n comme un paramètre fixe*, le système (1) est réductible à la forme

$$dy_1 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$dy_h = 0,$$

où $y_1, \ldots, y_h$ sont h fonctions indépendantes de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, mais peuvent contenir aussi le paramètre x_n. Si maintenant on ne regarde plus x_n comme constant, le système est évidemment réductible à la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} \varpi_1 \equiv dy_1 + b_1 dx_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varpi_h \equiv dy_h + b_h dx_n = 0, \end{cases}$$

où $b_1, \ldots, b_h$ sont des fonctions de $y_1, \ldots, y_h$ et, par exemple, de $x_{h+1}, \ldots, x_n$. On a, de plus,

$$\varpi_1' = [db_1 dx_n], \ \ldots, \ \varpi_h' = [db_h dx_n] ;$$

en tenant compte des équations (3), ces formules se réduisent à

$$\varpi_i' = \frac{\partial b_i}{\partial x_{h+1}} [dx_{h+1} dx_n] + \ldots + \frac{\partial b_i}{\partial x_{n-1}} [dx_{n-1} dx_n].$$

L'hypothèse entraîne donc comme conséquence que les coefficients b_i ne dépendent que de $y_1, \ldots, y_h, x_n$. Mais alors les équations (3) constituent un système d'équations différentielles ordinaires, qui par suite peuvent se réduire à la forme

$$dz_1 = 0, \ \ldots, \ dz_h = 0,$$

les lettres $z_1, \ldots, z_h$ désignant h intégrales premières indépendantes.

102. Le théorème précédent, dû à Frobenius, permet (nº **64**) d'exprimer par les relations

$$[\omega_1 \ldots \omega_h \omega_1'] = 0, \ \ldots, \ [\omega_1 \ldots \omega_h \omega_h'] = 0$$

les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité complète du système donné.

Prenons l'exemple d'une équation de Pfaff à trois variables

$$\omega \equiv P dx + Q dy + R dz = 0 ;$$

la condition d'intégrabilité complète est

$$[\omega\omega'] \equiv \left[(Pdx + Qdy + Rdz)\left(\overline{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}} dydz + \overline{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}} dzdx + \overline{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}} dxdy \right) \right]$$
$$\equiv \left\{ P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \right\} [dxdydz] = 0.$$

II. — *Formation du système caractéristique d'un système de Pfaff.*

103. On peut donner au raisonnement fait plus haut une autre forme en cherchant d'une manière générale le système de Pfaff caractéristique d'un système donné quelconque (1).

Pour que le système (1) soit invariant pour les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{4}$$

il faut et il suffit que les équations de (1) puissent s'exprimer au moyen des intégrales premières de (4) et de leurs différentielles ; donc il faut d'abord que $\omega_1, \dots, \omega_h$ s'annulent en tenant compte de (4) et il faut ensuite que les formes

$$[\omega_1\omega_2 \dots \omega_h\omega_1'], \dots, [\omega_1\omega_2 \dots \omega_h\omega_h']$$

puissent s'exprimer au moyen des différentielles des intégrales premières de (4) ; autrement dit *il faut que le système associé des formes*

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h, [\omega_1 \dots \omega_h\omega_1'], \dots, [\omega_1 \dots \omega_h\omega_h']$$

soit une conséquence des équations (4).

Réciproquement si cette condition est réalisée et si $y_1, \dots, y_{n-1}$ sont des intégrales premières de (4), on pourra ramener les équations à la forme

$$\begin{aligned} \varpi_1 &\equiv dy_1 + b_{1,h+1}dy_{h+1} + \dots + b_{1,n-1}dy_{n-1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varpi_h &\equiv dy_h + b_{h,h+1}dy_{h+1} + \dots + b_{h,n-1}dy_{n-1} = 0 ; \end{aligned}$$

la forme $[\varpi_1 \dots \varpi_h\varpi_i']$ ne devant pas faire intervenir dx_n, les dérivées $\frac{\partial b_{i,h+1}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial b_{i,n-1}}{\partial x_n}$ sont toutes nulles ; par suite les équations (1) peuvent s'écrire de manière à ne faire intervenir que les intégrales premières du système (4) et leurs différentielles. Donc le système (1) est bien invariant pour les équations (4).

Il résulte de là que *le système caractéristique de* (1) *n'est autre que le système associé des formes*

$$\omega_1, \dots, \omega_h ; [\omega_1 \dots \omega_h\omega_1'], \dots, [\omega_1 \dots \omega_h\omega_h'].$$

En particulier pour que le système soit complètement intégrable il faut et il suffit que ce système soit identique à (1), c'est-à-dire que les formes

$$[\omega_1 \dots \omega_h\omega_1'], \dots, [\omega_1 \dots \omega_h\omega_h']$$

soient identiquement nulles.

104. On peut encore obtenir les équations du système caractéristique de (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \ldots,\ \omega_h = 0, \\ \left\| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial \omega_i'}{\partial(dx_1)} & \dfrac{\partial \omega_i'}{\partial(dx_2)} & \cdots & \dfrac{\partial(\omega_i')}{\partial(dx_n)} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hn} \end{array} \right\| = 0. \end{array}\right.$$

En particulier le système caractéristique d'une équation de Pfaff

$$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n = 0$$

est donné par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n = 0, \\ \dfrac{a_{12}dx_2 + a_{13}dx_3 + \ldots + a_{1n}dx_n}{a_1} = \dfrac{a_{21}dx_1 + a_{23}dx_3 + \ldots + a_{2n}dx_n}{a_2} = \ldots \\ \qquad = \dfrac{a_{n1}dx_1 + \ldots + a_{n,n-1}dx_{n-1}}{a_n}, \end{array}\right.$$

en posant

$$a_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Nous reviendrons plus loin sur ce système (Chapitre XIV).

III. — *L'intégration d'un système de Pfaff complètement intégrable.*

105. Revenons à un système de Pfaff complètement intégrable que nous écrirons

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} dz_1 = a_{11}dx_1 + \ldots + a_{1q}dx_q, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dz_h = a_{h1}dx_1 + \ldots + a_{hq}dx_q. \end{array}\right.$$

L'intégration de ce système revient à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires à h fonctions inconnues $z_1, \ldots, z_h$ d'une seule variable indépendante x_1.

Nous savons en effet que le système admet une solution et une seule correspondant à des valeurs initiales données (x_i^0, z_j^0). Pour avoir les valeurs des fonctions inconnues $z_1, \ldots, z_h$ corrrespondant à un système de valeurs numériques données $x_1^1, \ldots, x_q^1$ des variables indépendantes, déplaçons-nous sur la variété intégrale depuis le point (x_i^0) jusqu'au point (x_i^1) et suivons la variation des z_j ; quelle que soit la succession des valeurs intermédiaires des

variables indépendantes, le résultat sera toujours le même. Posons par exemple

$$x_2 - x_2^0 = m_2(x_1 - x_1^0), \dots, x_q - x_q^0 = m_q(x_1 - x_1^0),$$

en désignant par $m_2, \dots, m_q$ les $q - 1$ quantités

$$m_i = \frac{x_i^1 - x_i^0}{x_1^1 - x_1^0} \qquad (i = 2, \dots, q).$$

Nous aurons

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dz_1 = (a_{11} + a_{12}m_2 + \dots + a_{1q}m_q)dx_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ dz_h = (a_{h1} + a_{h2}m_2 + \dots + a_{hq}m_q)dx_1. \end{array} \right.$$

Il nous suffira d'intégrer ce système d'équations différentielles ordinaires et de déterminer la solution qui, pour $x_1 = x_1^0$, correspond aux valeurs $z_1^0, \dots, z_h^0$ des fonctions inconnues. Une fois cette solution déterminée, on aura $z_1^1, \dots, z_h^1$ en remplaçant les quantités paramétriques $m_2, \dots, m_q$ par leurs valeurs indiquées plus haut.

En fait on supprimera les indices supérieurs 1 : on se contentera de remplacer, dans la solution obtenue, m_i par $\dfrac{x_i - x_i^0}{x_1 - x_1^0}$ et on aura ainsi les expressions des fonctions inconnues $z_1, \dots, z_h$.

Il est à remarquer que *la connaissance d'une intégrale première du système d'équations différentielles ordinaires* (6) *aux* $q - 1$ *paramètres* m_i *n'entraîne pas forcément la connaissance d'une intégrale première du système de Pfaff* (5).

IV. — *Les systèmes complets.*

106. Revenons au système complètement intégrable (1) dont nous désignerons par $y_1, \dots, y_h$ un système de h intégrales premières indépendantes. Choisissons arbitrairement $n - h$ formes différentielles linéaires

$$\omega_{h+1}, \dots, \omega_n$$

indépendantes entre elles et indépendantes des formes $\omega_1, \dots, \omega_h$. Toute forme linéaire en $dx_1, \dots, dx_n$ pourra s'exprimer, d'une manière et d'une seule, en fonction linéaire de $\omega_1, \dots, \omega_n$. Prenons alors une fonction f *indéterminée* et considérons sa différentielle totale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n ;$$

on pourra l'exprimer linéairement au moyen de $\omega_1, \dots, \omega_n$, les coefficients étant manifestement linéaires et homogènes en $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$. Soit

$$(7) \qquad df = X_1 f \,.\, \omega_1 + X_2 f \,.\, \omega_2 + \dots + X_n f \,.\, \omega_n.$$

Les n expressions $X_i f$ sont linéairement indépendantes en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Cela posé, toute intégrale première du système complètement intégrable (1) est caractérisée par la propriété que sa différentielle, considérée comme forme linéaire en $dx_1, \ldots, dx_n$, s'annule sous la seule condition que les équations (1) soient vérifiées ; autrement dit par la propriété d'annuler

$$X_{h+1}f, \ldots, X_n f.$$

Le système de $n - h$ équations aux dérivées partielles linéaires indépendantes

(8) $$X_{h+1}f = 0, \ldots, X_n f = 0$$

admet donc h solutions indépendantes $y_1, \ldots, y_h$.

Réciproquement supposons que le système (8) admette h solutions indépendantes (il ne peut manifestement pas en admettre davantage)

$$y_1, \ldots, y_h.$$

L'identité (7) nous donne

(9) $$dy_i = X_1 y_i \cdot \omega_1 + X_2 y_i \cdot \omega_2 + \ldots + X_h y_i \cdot \omega_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Comme les y_i sont des fonctions indépendantes, les seconds membres des équations (9) sont des combinaisons linéairement indépendantes de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$. Par suite *le système* (1) est équivalent à (2), donc *complètement intégrable*.

Convenons de dire que les équations (8) forment un *système complet* si elles admettent le nombre maximum h de solutions indépendantes. Nous voyons qu'*à tout système de Pfaff complètement intégrable correspond un système complet et réciproquement*. La correspondance est telle que si les équations du système de Pfaff sont

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_h = 0,$$

celles du système complet sont

$$X_{h+1}f = X_{h+2}f = \ldots = X_n f = 0.$$

107. Il est facile de trouver les conditions pour qu'un système donné d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre soit complet.

Partons de l'identité (7) et dérivons-la extérieurement. Nous aurons facilement

(9) $$\sum_{k=1}^{k=n} X_k f \cdot \omega'_k + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} X_i(X_j f)\,[\omega_i \omega_j] = 0.$$

Les n covariants ω'_k peuvent s'exprimer comme formes quadratiques extérieures de $\omega_1, \ldots, \omega_n$; soit

(10) $$\omega'_k = \sum_{(ij)}^{1,\ldots,n} c_{ijk}[\omega_i \omega_j].$$

En égalant à zéro, dans l'identité (9), l'ensemble des termes en $[\omega_i \omega_j]$, on trouve

(11) $$X_i(X_j f) - X_j(X_i f) + \sum_{k=1}^{k=n} c_{ijk} X_k f = 0.$$

On remarquera la dualité des formules (10) et (11).

Supposons alors le système (1) complètement intégrable. Cela signifie, d'après le théorème de Frobenius, que $\omega'_1, \ldots, \omega'_h$ s'annulent avec $\omega_1, \ldots, \omega_h$; autrement dit qu'on a

$$c_{h+i,h+j,k} = 0 \qquad (i,j = 1, \ldots, n-h;\ k = 1, \ldots, h).$$

Par suite, d'après (11), les combinaisons

$$X_{h+i}(X_{h+j}f) - X_{h+j}(X_{h+i}f)$$

ne dépendent linéairement que de $X_{h+1}f, \ldots, X_n f$. La réciproque est évidente.

Convenons de désigner par (XY) la combinaison $X(Yf) - Y(Xf)$. On voit que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit complet est que les parenthèses de tous les premiers membres pris deux à deux soient des combinaisons linéaires de ces premiers membres.*

CHAPITRE XI.

LA THÉORIE DU DERNIER MULTIPLICATEUR.

I. — *Définition et propriétés.*

108. Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

admettant un invariant intégral de degré maximum n

$$\Omega = M[(\delta x_1 - X_1\delta t)(\delta x_2 - X_2\delta t)\ldots(\delta x_n - X_n\delta t)].$$

Comme nous l'avons vu (n° **80**), la condition pour qu'il en soit ainsi est que la dérivée extérieure Ω' soit nulle, ce qui donne par un calcul facile

$$(2) \qquad \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Le coefficient M est connu sous le nom de *multiplicateur de Jacobi.*

La condition (2) exprime, comme nous savons, que la forme Ω peut s'exprimer au moyen de n intégrales premières indépendantes

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

du système (1) et de leurs différentielles; autrement dit qu'on a une identité

$$(3) \quad M[(\delta x_1 - X_1\delta t)\ldots(\delta x_n - X_n\delta t)] = H(y_1, \ldots, y_n)[\delta y_1\delta y_2\ldots\delta y_n].$$

Il nous est maintenant possible de retrouver les théorèmes classiques relatifs au multiplicateur de Jacobi.

Théorème I. — *Le quotient de deux multiplicateurs* M *et* M′ *est une intégrale première.* En effet les deux identités (3) relatives aux deux multiplicateurs M et M′ donnent

$$\frac{M}{M'} = \frac{H(y_1, \ldots, y_n)}{H'(y_1, \ldots, y_n)}.$$

Théorème II. — *Si l'on connaît p intégrales premières indépendantes des*

équations (1), *on peut déterminer un multiplicateur du système de $n - p$ équations différentielles auquel se ramène l'intégration du système donné.*

Supposons qu'on connaisse les p intégrales premières indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_p$, et supposons, ce qui est toujours permis, que ce soient des fonctions indépendantes des p variables $x_1, \ldots, x_p$, c'est-à-dire

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)} \neq 0.$$

Les équations (1) peuvent alors s'écrire

$$(4) \qquad \frac{dy_1}{dt} = 0, \ldots, \frac{dy_p}{dt} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{dx_{p+1}}{dt} = X_{p+1}, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

et, en égalant $y_1, \ldots, y_p$ à des constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_p$, l'intégration du système (1) se ramène à celle du système (5), dans les seconds membres duquel on a supposé remplacé $x_1, \ldots, x_p$ par leurs valeurs en fonction de $x_{p+1}, \ldots, x_n, t, C_1, \ldots, C_p$.

Cela posé la forme Ω, qui est invariante pour les équations (4) et (5), peut évidemment s'écrire

$$\Omega = N[\delta y_1 \ldots \delta y_p\,(\delta x_{p+1} - X_{p+1}\delta t) \ldots (\delta x_n - X_n \delta t)];$$

pour avoir la valeur du coefficient N, il suffit d'identifier cette expression avec l'expression primitive ; en égalant par exemple les termes en

$$[\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_n],$$

on obtient

$$M = N\,\frac{D(y_1, \ldots, y_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}.$$

La quantité N étant ainsi déterminée, on a l'identité

$$N[\delta y_1 \ldots \delta y_p\,(\delta x_{p+1} - X_{p+1}\delta t) \ldots (\delta x_n - X_n\delta t)] = H\,[\delta y_1 \ldots \delta y_p \delta y_{p+1} \ldots \delta y_n],$$

c'est-à-dire

$$[\delta y_1 \delta y_2 \ldots \delta y_p\,\{N(\delta x_{p+1} - X_{p+1}\delta t) \ldots (\delta x_n - X_n\delta t) - H\delta y_{p+1} \ldots \delta y_n\}] = 0.$$

Cette identité exprime (nº **64**) que, *si on tient compte des relations linéaires*

$$\delta y_1 = 0, \quad \delta y_2 = 0, \ldots, \delta y_p = 0,$$

on a

$$(6) \quad N[(\delta x_{p+1} - X_{p+1}\delta t) \ldots (\delta x_n - X_n\delta t)] = H(y_1, \ldots, y_n)\,[\delta y_{p+1} \ldots \delta y_n].$$

Le premier membre de cette égalité est donc une forme invariante pour le système d'équations différentielles (5) : autrement dit *le système* (5) *admet le multiplicateur*

$$N = \frac{M}{\dfrac{D(y_1, \ldots, y_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}}.$$

Théorème III. — *Si l'on connaît $n - 1$ intégrales premières indépendantes des équations* (1), *l'intégration des équations s'achève par une quadrature.*

Il suffit d'appliquer le théorème II au cas $p = n - 1$: on voit alors que la forme différentielle linéaire

$$\frac{M}{\frac{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}} (\delta x_n - X_n \delta t)$$

est une différentielle exacte, quand on y suppose les variables liées par les relations

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \ldots, y_{n-1} = C_{n-1}.$$

La solution générale des équations (1) s'obtient donc en égalant à une constante C_n l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{M}{\frac{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}} (dx_n - X_n dt).$$

II. — *Généralisations.*

109. Le théorème du dernier multiplicateur peut être généralisé au cas, beaucoup plus général, où l'on connaît une forme invariante Ω *de degré quelconque* $r < n$. Supposons qu'on connaisse $n - 1$ intégrales premières indépendantes $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Choisissons de toutes les manières possibles $n - r$ de ces intégrales

$$y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_{n-r}}$$

et considérons les formes, *évidemment invariantes*,

$$[\delta y_{\alpha_1} \delta y_{\alpha_2} \ldots \delta y_{\alpha_{n-r}} \Omega];$$

toutes ces formes sont de degré n. *Si elles ne sont pas toutes nulles*, on est ramené au cas précédemment étudié; *on a un multiplicateur*, on peut même en avoir plusieurs, et dans certains cas le théorème I peut donner, par division de deux de ces multiplicateurs, la dernière intégrale première.

Le cas d'exception est celui où toutes les formes précédemment écrites seraient nulles. Or imaginons Ω exprimé au moyen de $\delta y_1, \ldots, \delta y_{n-1}$ et de la différentielle d'une $n^{\text{ième}}$ intégrale première (inconnue) δy_n. L'hypothèse faite revient à dire que Ω *ne contient pas* δy_n, car si Ω contenait par exemple un terme non nul tel que

$$A[\delta y_1 \ldots \delta y_{r-1} \delta y_n],$$

le produit extérieur de Ω par $\delta y_{r+1} \delta y_{r+2} \ldots \delta y_{n-1}$ ne serait pas nul.

Cela étant Ω serait donc une forme extérieure en $\delta y_1, \ldots, \delta y_{n-1}$, forme extérieure dont on pourrait calculer les coefficients. Chacun de ces coefficients serait une intégrale première. Si l'un au moins de ces coefficients est indépendant de $y_1, \ldots, y_{n-1}$, on achève l'intégration en l'égalant à une constante arbitraire. Le seul cas douteux est celui où tous les coefficients seraient des

fonctions de $y_1, \ldots, y_{n-1}$; or il est clair que dans ce cas la connaissance de la forme invariante Ω ne peut être d'aucun secours pour achever l'intégration. Remarquons simplement que dans ce cas les équations données *ne constituent pas* le système caractéristique de Ω.

Nous pouvons donc énoncer le théorème général suivant :

La connaissance d'une forme différentielle invariante Ω admettant pour système caractéristique le système d'équations différentielles données (1) *permet, dans le cas le plus défavorable, d'achever par une quadrature l'intégration de ce système lorsqu'on en connaît déjà $n - 1$ intégrales premières indépendantes.*

110. Une autre généralisation de la théorie du dernier multiplicateur de Jacobi est relative aux systèmes de Pfaff complètement intégrables. Soit

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \ldots, \omega_r = 0$$

un système complètement intégrable dont on connaît une forme invariante de degré maximum r

$$\Omega = M[\omega_1\omega_2 \ldots \omega_r].$$

La connaissance de $r - 1$ intégrales premières $y_1, \ldots, y_{r-1}$ du système permet d'achever l'intégration par une quadrature. En effet en égalant $y_1, \ldots, y_{r-1}$ à des constantes arbitraires, le système donné se ramène à une seule équation, $\omega_r = 0$ par exemple, et on a une formule telle que

$$\Omega = N[\delta y_1 \ldots \delta y_{r-1}\omega_r],$$

où le coefficient N se déduit de M par une identification facile. Il en résulte que $N\omega_r$ est une forme invariante pour l'équation unique $\omega_r = 0$ qui reste à intégrer, autrement dit que $N\omega_r$ est une différentielle exacte. L'intégration s'achève donc par une quadrature.

Enfin le théorème tout à fait général qui résume tous les cas envisagés est le suivant :

La connaissance d'une forme différentielle Ω permet, dans le cas le plus défavorable, d'achever par une quadrature l'intégration du système caractéristique de cette forme lorsqu'on en connaît déjà $r - 1$ intégrales premières indépendantes, en désignant par r la classe de la forme.

III. — *Cas où la variable indépendante n'est pas particularisée.*

111. Si le système d'équations différentielles donné est mis sous la forme

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

tout invariant intégral de degré $n - 1$ est de la forme

$$\Omega = MX_1[dx_2dx_3 \ldots dx_n] - MX_2[dx_1dx_3 \ldots dx_n] + \ldots$$
$$- (-1)^n MX_n[dx_1dx_2 \ldots dx_{n-1}],$$

et la condition $\Omega' = 0$ devient

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

A part cette différence d'écriture, la théorie est identique à celle qui a été faite plus haut.

IV. — *Cas où les équations données admettent une transformation infinitésimale.*

112. Prenons le cas général d'un système complètement intégrable

$$(7) \qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \ldots, \omega_r = 0$$

admettant une forme invariante de degré r, qu'on peut toujours supposer ramenée à la forme

$$\Omega = [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_r].$$

Supposons que ce système admette une transformation infinitésimale connue Af, et formons les quantités

$$\omega_1(A), \quad \omega_2(A), \ldots, \omega_r(A),$$

que nous supposerons non toutes nulles. On peut toujours supposer les équations du système écrites de manière à avoir

$$(8) \qquad \omega_1(A) = 1, \quad \omega_2(A) = \omega_3(A) = \ldots = \omega_r(A) = 0,$$

Ω conservant la même forme.

Comme on l'a vu plus haut (n° **88**), la connaissance de la transformation infinitésimale Af permet de déduire de la forme $\Omega(\delta)$ une autre forme invariante $\Omega(A, \delta)$, qui, avec les hypothèses faites ici, se réduit à

$$\Omega(A, \delta) = [\omega_2 \ldots \omega_r].$$

Nous désignerons par la lettre Π cette nouvelle forme invariante. Nous avons

$$\Omega = [\omega_1 \Pi].$$

Le système *associé* (et non caractéristique) de Π est

$$(9) \qquad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \ldots, \omega_r = 0;$$

il est complètement intégrable. Cela résulte d'un théorème antérieur (n° **98**), mais cela résulte aussi de ce que Ω étant exprimable au moyen de r intégrales premières $y_1, \ldots, y_r$ du système donné et de leurs différentielles, le système associé de $\Omega(A, \delta)$ ne contiendra, lui aussi, que $y_1, \ldots, y_r$ et leurs différentielles ; ce sera par suite un système d'équations différentielles ordinaires, donc complètement intégrable.

Formons maintenant la dérivée extérieure Π' de la forme Π ; c'est une nouvelle forme invariante de degré r, on a donc

$$\Pi' = m\Omega = m[\omega_1\Pi].$$

Le coefficient m est une intégrale première. Mais il y a une discussion à faire.

1° $m = 0$. — Π' est nul, et le système (9) associé de Π est son système caractéristique. On connaît donc un multiplicateur du système (9) ; par suite quand on connaîtra $r - 2$ intégrales premières indépendantes de ce système, l'intégration s'achèvera par une quadrature. Une deuxième quadrature achèvera alors l'intégration du système donné (7) ; cette quadrature est manifestement $\int \omega_1$.

Il est évident qu'ici Π et Ω sont réductibles à

$$\Pi = [\delta y_2 \delta y_3 \ldots \delta y_r], \qquad \Omega = [\delta y_1 \delta y_2 \ldots \delta y_r];$$

la transformation Af, appliquée aux intégrales premières du système donné, se réduit à

$$Af = \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Il y a une infinité de manières de choisir les intégrales premières de manière que les données restent les mêmes, c'est-à-dire de manière que Ω et Af ne changent pas ; on peut effectuer sur $y_2, y_3, \ldots, y_r$ une transformation arbitraire de déterminant fonctionnel 1, et ajouter à y_1 une fonction arbitraire de $y_2, \ldots, y_r$. Cela explique la nature des simplifications qui se présentent dans l'intégration.

2° *m est une constante non nulle.* — Dans ce cas supposons qu'on ait intégré le système (9) et soit $y_2, y_3, \ldots, y_r$ un système de $r - 1$ intégrales indépendantes. On aura

$$\Pi = H[\delta y_2 \delta y_3 \ldots \delta y_r],$$

le coefficient H étant *indépendant* de $y_2, \ldots, y_r$, sans quoi Π' serait nul, mais étant une intégrale première du système donné. On a donc une $r^{\text{ième}}$ intégrale du système donné par de simples différentiations.

En écrivant y_1 à la place de H, nous avons

$$\Omega = \frac{1}{m}[\delta y_1 \delta y_2 \ldots \delta y_r], \qquad \Pi = y_1[\delta y_2 \ldots \delta y_r], \qquad Af = m y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

La transformation la plus générale en $y_1, \ldots, y_r$ qui conserve les données s'obtient en effectuant sur $y_2, \ldots, y_r$ une transformation *arbitraire* et posant

$$\overline{y}_1 = \frac{y_1}{\dfrac{D(\overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_r)}{D(y_2, \ldots, y_r)}}.$$

Cela explique pourquoi l'intégration du système (9) ne peut pas être simplifiée et aussi pourquoi, cette intégration étant effectuée, celle du système donné (7) s'en déduit.

3° *Le coefficient m n'est pas constant, mais* $A(m)$ *est nul.* — La fonction m est une intégrale première du système (9). L'intégration de ce système revient à celle d'un système d'équations différentielles à $r-2$ fonctions inconnues; l'intégration du système donné s'en déduit comme dans le cas précédent.

La forme Π est réductible à

$$\Pi = y_1[\delta m \delta y_3 \ldots \delta y_r]$$

et on a

$$\Omega = \frac{1}{m}[\delta y_1 \delta m \delta y_3 \ldots \delta y_r], \qquad Af = m y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Les transformations qui conservent les données sont

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{m} = m, \quad \overline{y_3} = f_3(m, y_3, \ldots, y_r), \ldots, \overline{y_r} = f_r(m, y_3, \ldots, y_r),\\ &\overline{y_1} = \frac{y_1}{\dfrac{D(f_3, \ldots, f_r)}{D(y_3, \ldots, y_r)}}.\end{aligned}\right.$$

Elles expliquent les simplifications que présente l'intégration.

4° *Le coefficient m n'est pas constant, et* $Am = m_1 \neq 0$. — Prenons tout de suite le cas général

$$Am = m_1, \; Am_1 = m_2, \ldots, Am_{i-1} = m_i,$$

en supposant que $m, m_1, \ldots, m_{i-1}$ sont i intégrales premières indépendantes du système donné, et que m_i est une fonction de $m, \ldots, m_{i-1}$.

Le système donné admet alors i intégrales premières indépendantes connues et *son intégration revient à celle d'un système d'équations différentielles à* $r-i$ *fonctions inconnues dont on connaît un multiplicateur.*

Cherchons les formes réduites de Ω et Af. On peut toujours poser

$$\Omega = H[\delta m \delta m_1 \ldots \delta m_{i-1} \delta y_{i+1} \ldots \delta y_r],$$

où $y_{i+1}, \ldots, y_r$ sont $r-i$ intégrales premières du système (9) et H une fonction de $m, \ldots, m_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_r$. On a évidemment

$$Af = m_1 \frac{\partial f}{\partial m} + m_2 \frac{\partial f}{\partial m_1} + \ldots + m_i \frac{\partial f}{\partial m_{i-1}}.$$

Exprimons que la dérivée extérieure de $\Pi = \Omega(A, \delta)$ est égale à $m\Omega$, ou, ce qui revient au même,

$$A(\Omega) = m\Omega.$$

On a

$$A(\Omega) = \left(A(H) + \frac{\partial m_i}{\partial m_{i-1}} H\right)[\delta m \delta m_1 \ldots \delta m_{i-1} \delta y_{i+1} \ldots \delta y_r];$$

on doit donc avoir

$$A(H) + \frac{\partial m_i}{\partial m_{i-1}} H = mH.$$

Soit $h(m, m_1, \ldots, m_{i-1})$ une solution *particulière* de cette équation aux dérivées partielles; cette dernière peut s'écrire

$$A\left(\frac{H}{h}\right) = 0;$$

autrement dit $\frac{\Pi}{h}$ est une intégrale des équations (9). On peut alors choisir $y_{i+1}, \ldots, y_r$ de manière à réduire cette fonction à l'unité. On aura donc

$$\Omega = h(m, \ldots, m_{i-1}) [\delta m \delta m_1 \ldots \delta m_{i-1} \delta y_{i+1} \ldots \delta y_r],$$
$$Af = m_1 \frac{\partial f}{\partial m} + m_2 \frac{\partial f}{\partial m_1} + \ldots + m_i \frac{\partial f}{\partial m_{i-1}}.$$

Les transformations qui conservent les données sont évidemment

$$\overline{m} = m, \ \overline{m}_1 = m_1, \ \ldots, \ \overline{m}_{i-1} = m_{i-1},$$
$$\overline{y}_{i+1} = f_{i+1}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_r), \ \ldots, \ \overline{y}_r = f_r(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_r)$$

avec

$$\frac{D(\overline{y}_{i+1}, \ldots, \overline{y}_r)}{D(y_{i+1}, \ldots, y_r)} = 1.$$

(On a désigné par $\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}$ $i - 1$ fonctions indépendantes de $m, m_1, \ldots m_{i-1}$ satisfaisant à $A\mu = 0$).

La nature des transformations précédentes explique les simplifications présentées par l'intégration.

Il peut du reste se faire que $i = r$; dans ce cas aucune intégration n'est à effectuer, puisqu'on a par différentiation r intégrales premières indépendantes.

V. — *Applications.*

113. La théorie du dernier multiplicateur s'applique à tous les exemples précédemment indiqués où intervenait une forme invariante de degré égal au nombre des fonctions inconnues. Rappelons ces exemples :

1° Les équations qui donnent le mouvement des molécules d'un milieu continu quand on connaît la densité ρ et les composantes u, v, w de la vitesse en fonction de x, y, z, t :

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w.$$

L'invariant intégral étant

$$\Omega = \rho[(\delta x - u\delta t)(\delta y - v\delta t)(\delta z - w\delta t)],$$

le multiplicateur est ρ. Si donc on connaît deux intégrales premières indépendantes, l'intégration s'achève par une quadrature.

Si le mouvement est *permanent*, la forme invariante

$$\Pi = \Omega(A, \delta) = -\rho u[\delta y \delta z] - \rho v[\delta z \delta x] - \rho w[\delta x \delta y]$$

a sa dérivée nulle. Les équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},$$

qui donnent les trajectoires géométriques, admettent un multiplicateur ρ; par suite si on connaît une intégrale première, la détermination des trajectoires n'exige qu'une quadrature, et une dernière quadrature donne t.

2° Les équations qui donnent les lignes de tourbillon d'un champ de vecteurs donné (X, Y, Z) sont les équations caractéristiques de la forme

$$[\delta X \delta x] + [\delta Y \delta y] + [\delta Z \delta z] = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)[\delta y \delta z] + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)[\delta z \delta x] + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)[\delta x \delta y];$$

ces équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}} = \frac{dy}{\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}} = \frac{dz}{\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}}$$

admettent donc un multiplicateur connu, qui est l'unité.

3° Les équations de la Dynamique, sous leur forme canonique

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

admettent le multiplicateur 1 : cela résulte d'un calcul direct; cela résulte aussi de ce que l'existence de la forme invariante

$$\Omega = \sum_{i=1}^{i=n} [(\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t)(\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta t)]$$

entraîne celle de la forme invariante Ω^n :

$$\frac{1}{n!}\Omega^n = \prod_{i=1}^{i=n} [(\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t)(\delta p_i + \frac{\partial H}{d q_i}\delta t)].$$

114. Mais la théorie du dernier multiplicateur ne s'applique pas seulement aux systèmes matériels pour lesquels sont valables les équations canoniques d'Hamilton, mais à tout système *à liaisons parfaites, holonomes, avec forces données ne dépendant que de la position du système.*

Pour un tel système on a les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \ldots, q_n, t).$$

Si les Q_i étaient nuls, l'introduction des variables canoniques d'Hamilton conduirait aux équations

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{d p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{d q_i}.$$

Il en résulte que les équations complètes du mouvement sont susceptibles d'être mises sous la forme

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i.$$

Elles admettent le multiplicateur 1, autrement dit la forme invariante

$$\Omega = [(\delta q_1 - \frac{\partial H}{\partial p_1}\delta t)\dots(\delta q_n - \frac{\partial H}{\partial p_n}\delta t)(\delta p_1 + \overline{\frac{\partial H}{\partial q_1} - Q_1\delta t})\dots(\delta p_n + \overline{\frac{\partial H}{\partial q_n} - Q_n\delta t})]$$

qui, avec les variables de Lagrange, s'écrit

$$\Omega = \prod_{i=1}^{i=n} [(\delta q_i - q_i'\delta t)\,(\delta\,\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \overline{\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i\,\delta t})].$$

Si les liaisons sont indépendantes du temps, ainsi que les forces données, les équations du mouvement admettent la transformation infinitésimale

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t}$$

et, par suite, la forme invariante $\Pi = \Omega(A, \delta)$, dont la dérivée est nulle. D'après la théorie générale, l'intégration des équations du mouvement est ramenée à celle des équations des trajectoires (géométriques)

$$\frac{dq_i}{q_i'} = \frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial q_i'}}{\dfrac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dq_i}{\dfrac{\partial H}{\partial p_i}} = \frac{dp_i}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i},$$

auxquelles s'applique la théorie du dernier multiplicateur, et à une quadrature donnant le temps : on a en effet manifestement, par exemple,

$$\Omega = \left[\left(\delta t - \frac{\delta q_1}{q_1'}\right)\Pi\right]$$

puisque $\Omega(A, \delta)$ est égal à Π.

115. Comme exemple de forces *dépendant du temps*, mais avec une transformation infinitésimale connue, considérons le cas simple d'un point mobile sur une droite fixe et attiré par un point fixe de la droite suivant une force proportionnelle à la distance, le facteur de proportionnalité étant une fonction connue du temps. Le mouvement est donné par l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(t)x,$$

ou par le système

$$(10) \qquad \frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} + k(t)x = 0.$$

L'équation du second ordre ne change pas si on change x en λx, λ étant un facteur constant arbitraire ; par suite le système qui lui est équivalent admet la transformation infinitésimale dont l'effet est de changer respectivement

$$x, \quad x', \quad t$$

en

$$(1+\varepsilon)x, \quad (1+\varepsilon)x', \quad t;$$

le symbole de cette transformation est

$$Af = x\frac{\partial f}{\partial x} + x'\frac{\partial f}{\partial x'}.$$

Le système (10) admet la forme invariante

$$\Omega = [(\delta x - x'\delta t)(\delta x' + kx\delta t)]$$

correspondant au multiplicateur 1. Ici la forme dérivée $\Omega(A, \delta)$ est

$$\varpi = x(\delta x' + kx\delta t) - x'(\delta x - x'\delta t) = x\delta x' - x'\delta x + (x'^2 + kx^2)\delta t :$$

c'est une forme invariante. Sa dérivée extérieure est

$$\varpi' = 2[\delta x\delta x'] + 2x'[\delta x'\delta t] + 2kx[\delta x\delta t] = 2\Omega.$$

Le coefficient de Ω dans le second membre étant constant, nous savons (n° **112**) qu'il suffit d'intégrer l'équation *complètement intégrable* $\varpi = 0$ pour en déduire par des différentiations la solution générale du système donné : la forme ϖ est en effet réductible à $y_1\delta y_2$. Cette forme ϖ s'écrit, en changeant δ en d,

$$\varpi = x^2\left[d\frac{x'}{x} + \left(\frac{x'^2}{x^2} + k\right)dt\right].$$

On est donc conduit, en posant

$$\frac{x'}{x} = u,$$

à intégrer l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dt} + u^2 + k = 0.$$

Supposons intégrée cette équation ; on a une intégrale première sous la forme

$$y_2 = \frac{\alpha(t)u + \beta(t)}{\gamma(t)u + \delta(t)} = \frac{\alpha(t)x' + \beta(t)x}{\gamma(t)x' + \delta(t)x}.$$

En identifiant ϖ à y_1dy_2, on trouve, en prenant par exemple les termes en dx',

$$x = y_1x\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x' + \delta x)^2},$$

d'où

$$y_1 = \frac{(\gamma x' + \delta x)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Si on suppose, ce qui est toujours permis, que le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ est égal à 1 (ou même simplement constant), la solution générale du système est fournie par les équations

$$\alpha x' + \beta x = C_1,$$
$$\gamma x' + \delta x = C_2,$$

et l'on a

$$x = C_2\alpha(t) - C_1\gamma(t).$$

Autrement dit les coefficients $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ qui se présentent dans l'intégrale

générale de l'équation de Riccati constituent un système de solutions fondamentales de l'équation du second ordre donnée.

On peut encore présenter les choses autrement. Supposons qu'on connaisse la solution générale u de l'équation de Riccati exprimée au moyen de t et de la constante d'intégration y_2. L'identité

$$y_1 dy_2 = x^2[du + (u^2 + k)dt]$$

donne

$$y_1 = x^2 \frac{\partial u}{\partial y_2},$$

d'où l'on tire x en fonction de y_1, y_2 et t. Comme on a

$$u = \frac{\delta y_2 - \beta}{-\gamma y_2 + \alpha},$$

on obtient

$$x^2 = y_1(\alpha - \gamma y_2)^2,$$

d'où

$$x = C_1\alpha + C_2\gamma.$$

116. Remarque. — La théorie du dernier multiplicateur de Jacobi s'applique à d'autres problèmes de Mécanique que ceux qui ont été indiqués plus haut. Prenons par exemple le mouvement d'un point matériel soumis à une force fonction de sa seule position dans l'espace, mais le système de référence étant entraîné par un mouvement de rotation uniforme autour de oz. Les équations du mouvement sont de la forme

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} - X = 0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - 2\alpha \frac{dx}{dt} - Y = 0, \\ &\frac{d^2z}{dt^2} \qquad\qquad - Z = 0, \end{aligned}$$

X, Y, Z étant des fonctions données de x, y, z, t. En les écrivant

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = -2\alpha y' + X, \\ &\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = 2\alpha x' + Y, \\ &\frac{dz}{dt} = z', \qquad \frac{dz'}{dt} = Z, \end{aligned}$$

on obtient un système qui admet manifestement le multiplicateur 1.

117. La dernière application que nous envisagerons nous sera fournie par l'invariant intégral de l'Hydrodynamique

$$\Omega = \xi[\delta y \delta z] + \eta[\delta z \delta x] + \zeta[\delta x \delta y] + (\eta w - \zeta v)[\delta x \delta t] + (\zeta u - \xi w)[\delta y \delta t] + (\xi v - \eta u)[\delta z \delta t].$$

Le système caractéristique de cet invariant est formé des deux équations de Pfaff

$$\frac{dx - udt}{\xi} = \frac{dy - vdt}{\eta} = \frac{dz - wdt}{\zeta}.$$

Les variétés intégrales sont, dans l'univers (x, y, z, t), les variétés à deux dimensions engendrées par exemple par une ligne de tourbillon dans ses différentes positions successives.

L'intégration de ce système revient à celle d'un système de deux équations différentielles à deux fonctions inconnues dont on connaît un multiplicateur. La recherche des trajectoires des molécules (lignes fluides) exige en outre l'intégration d'une équation différentielle ordinaire *qui peut être quelconque.*

Si le mouvement est permanent, les variétés caractéristiques sont données par deux quadratures, à savoir

$$\int \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = C,$$

puis, en tenant compte de l'équation précédente, supposée résolue par rapport à z,

$$t + \int \frac{\eta dx - \xi dy}{\xi v - \eta u} = C'.$$

CHAPITRE XII.

LES ÉQUATIONS QUI ADMETTENT UN INVARIANT INTÉGRAL LINÉAIRE RELATIF.

I. — *Méthode générale d'intégration.*

118. Considérons une forme de Pfaff ω et le système caractéristique de l'invariant *intégral* relatif $\int \omega$. C'est le système associé de la forme ω'.

Supposons d'abord ω à $2n+1$ variables ; la forme ω' étant de rang *pair* (n° **59**), son système caractéristique sera formé en général de $2n$ équations. Par suite *il existe en général un système d'équations différentielles et un seul admettant un invariant intégral relatif* $\int \omega$, ω *étant une forme de Pfaff arbitraire à* $2n+1$ *variables*. C'est le cas de l'invariant intégral de la Dynamique.

Soit d'une manière générale $2n$ le rang (ou la classe) de la forme ω'. Il est facile d'indiquer une méthode d'intégration des équations caractéristiques de ω'.

Soit en effet y_1 une intégrale première de ces équations (elle est obtenue par une opération d'ordre $2n$). Si on lie les variables par la relation $y_1 = C_1$, c'est-à-dire les différentielles par la relation $dy_1 = 0$, le rang de ω' diminue, et comme il reste toujours pair, il se réduit à $2n-2$. Soit y_2 une intégrale première du nouveau système caractéristique ; en supposant

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2,$$

le rang de ω' se réduit à $2n-4$, et ainsi de suite. On pourra donc, par des opérations successives d'ordres

$$2n,\ 2n-2,\ \ldots,\ 4,\ 2,$$

trouver n intégrales premières

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

telles que, si on suppose les variables liées par les relations

$$y_1 = C_1,\ y_2 = C_2,\ \ldots,\ y_n = C_n,$$

le rang de ω' devienne nul. A ce moment, ω' étant identiquement nulle, la forme ω est une différentielle exacte ; une quadrature la met donc sous la forme

$$\omega = dS.$$

La fonction S dépend des n constantes $C_1, \ldots, C_n$. Si on ne suppose plus les variables liées par les n relations indiquées, on a évidemment

$$\omega = dS + z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \ldots + z_n dy_n$$

et par suite

$$\omega' = [dz_1 dy_1] + [dz_2 dy_2] + \ldots + [dz_n dy_n].$$

Comme ω' est de rang $2n$, les $2n$ différentielles dy_i et dz_i sont linéairement indépendantes ; donc *les $2n$ fonctions y_i et z_i constituent un système d'intégrales premières indépendantes des équations données* dont l'intégration est ainsi achevée.

En définitive l'intégration a exigé $n+1$ opérations d'ordres

$$2n,\ 2n-2,\ \ldots,\ 4,\ 2,\ 0$$

suivies de différentiations.

Remarque I. — La quantité S ne sert ici que d'intermédiaire ; ce n'est pas en général une intégrale première des équations caractéristiques de l'invariant $\int \omega$.

Remarque II. — On voit d'après le résultat obtenu que *toute forme quadratique extérieure de dérivée extérieure nulle peut se mettre sous la forme*

$$[dz_1 dy_1] + [dz_2 dy_2] + \ldots + [dz_n dy_n].$$

119. Il importe de se rendre compte de l'indétermination du choix des fonctions y_i et z_i qui entrent dans la forme canonique. L'égalité

$$[dz_1' dy_1'] + [dz_2' dy_2'] + \ldots + [dz_n' dy_n'] = [dz_1 dy_1] + \ldots + [dz_n dy_n]$$

entraîne la propriété de la différence

$$z_1' dy_1' + z_2' dy_2' + \ldots + z_n' dy_n' - (z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \ldots + z_n dy_n)$$

d'être une différentielle exacte dV. Supposons, ce qui est le cas général, que $y_1', \ldots, y_n'$ soient des fonctions indépendantes de $z_1, \ldots, z_n$; alors il n'y a aucune relation entre les y_i et les y_i'. En exprimant V en fonction des y_i et des y_i', on en déduit

$$z_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i'}, \qquad z_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}.$$

Ces équations, où intervient une fonction arbitraire de $2n$ arguments, permettent d'exprimer les y' et les z' en fonction des y et des z ; les n dernières donnent en effet $y_1', \ldots, y_n'$ et les n premières donnent ensuite $z_1', \ldots, z_n'$. Cela suppose que l'on n'a pas

$$\frac{D\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}, \frac{\partial V}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')} = 0.$$

Sous la même condition on peut tirer les y en fonction des y' et des z' au moyen des n premières équations et obtenir ensuite les z au moyen des n dernières équations.

On traiterait de même le cas où entre les y et les y' il existe une ou plusieurs relations.

L'ensemble des transformations ainsi définies sur les variables y et z, *c'est-à-dire sur les courbes intégrales des équations données*, définit un groupe infini qui joue dans cette théorie le même rôle que le groupe des transformations de déterminant fonctionnel égal à 1 dans la théorie du multiplicateur de Jacobi.

120. Revenons à l'intégration des équations caractéristiques de ω'. Supposons que, par un procédé quelconque, nous soyons arrivés à connaître $N > n$ intégrales premières indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_N$ telles qu'en les égalant à des constantes arbitraires, le rang de ω' devienne nul, c'est-à-dire ω devienne une différentielle exacte. Une quadrature suivie de différentiations nous donne alors

$$\omega = dS + z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \ldots + z_N dy_N.$$

Il est facile de voir que $z_1, z_2, \ldots, z_N$ *sont des intégrales premières.*

Supposons en effet que parmi les fonctions y_i et z_i il y en ait $N + r$ indépendantes ; on peut alors exprimer les fonctions z_i en fonction des y_i et de r d'entre elles, que nous appellerons $t_1, t_2, \ldots, t_r$. Cela posé on a

$$\omega' = [dz_1 dy_1] + [dz_2 dy_2] + \ldots + [dz_N dy_N].$$

Le système caractéristique de ω' comprend par hypothèse les équations

$$dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0, \ldots, dy_N = 0.$$

Il comprend aussi l'équation

$$\frac{\partial \omega'}{\partial [dy_i]} \equiv - dz_i + \frac{\partial z_1}{\partial y_i} dy_1 + \frac{\partial z_2}{\partial y_i} dy_2 + \ldots + \frac{\partial z_N}{\partial y_i} dy_N = 0,$$

donc l'équation

$$dz_i = 0.$$

On voit par là que les z_i sont des intégrales premières, et d'autre part $N + r$ doit être égal à $2n$.

Finalement *la connaissance de* N *intégrales premières rendant* ω *différentielle exacte quand on les égale à des constantes arbitraires, permet d'achever l'intégration par une quadrature et des différentiations.*

121. Dans la pratique il peut arriver qu'on cherche non pas toutes les solutions des équations différentielles données, mais seulement celles pour lesquelles les N intégrales premières $y_1, \ldots, y_N$ ont des valeurs *numériques* données. On peut alors procéder de la manière suivante. La forme ω', étant nulle quand on annule $dy_1, \ldots, dy_N$, peut, d'une infinité de manières, être mise sous la forme

$$\omega' = [dy_1 \varpi_1] + [dy_2 \varpi_2] + \ldots + [dy_N \varpi_N],$$

les ϖ_i étant des formes linéaires convenablement choisies. Parmi ces N formes ϖ_i il y en a $2n - N$ indépendantes entre elles et indépendantes des dy_i ; supposons qu'il en soit ainsi de $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2n-N}$. Le système caractéristique de ω' est manifestement formé des équations

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_N = 0,$$
$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_{2n-N} = 0.$$

Exprimons que la dérivée extérieure de ω' est nulle : nous obtenons

$$[dy_1\varpi_1'] + [dy_2\varpi_2'] + \ldots + [dy_N\varpi_N'] = 0,$$

d'où en particulier, en multipliant extérieurement par $[dy_2 dy_3 \ldots dy_N]$,

$$[dy_1 dy_2 \ldots dy_N \varpi_1'] = 0.$$

La forme ϖ_1 (et aussi les formes $\varpi_2, \ldots, \varpi_{2n-N}$) sont donc des différentielles exactes quand on donne aux y_i des valeurs numériques fixes. Par suite *les solutions cherchées s'obtiennent par $2n - N$ quadratures indépendantes*

$$\int \varpi_1 = \gamma_1, \ldots, \int \varpi_{2n-N} = \gamma_{2n-N}.$$

Il n'y a pas lieu de s'étonner de rencontrer ici $2n - N$ quadratures alors que la recherche de la solution générale n'exigeait qu'une quadrature. En effet, effectuer les $2n - N$ quadratures indiquées ci-dessus, c'est effectuer la quadrature *unique*

$$\int \lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 + \ldots + \lambda_{2n-N}\varpi_{2n-N} = C^{te},$$

avec $2n - N$ *paramètres* arbitraires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n-N}$.

Le procédé d'intégration précédent n'utilise que la forme invariante ω' et ne fait pas intervenir la forme ω. *Ce qui joue un rôle essentiel, c'est donc la connaissance de l'invariant intégral absolu du second degré $\int \omega'$, et la propriété de la forme ω' d'être une dérivée exacte.* La forme ω (ou les formes ω) dont ω' est la dérivée ne joue qu'un rôle accessoire.

II. — *Les parenthèses de Poisson et l'identité de Jacobi.*

122. Soit $2n$ le rang de la dérivée extérieure ω', et soient f et g deux intégrales premières de son système caractéristique. Les deux formes différentielles

$$[\omega'^{n-1} df dg] \quad \text{et} \quad [\omega'^n]$$

sont invariantes de degré maximum $2n$; elles ne diffèrent donc que par un facteur, et ce facteur est une intégrale première. Nous poserons

$$\frac{1}{(n-1)!}[\omega'^{n-1} df dg] = \frac{1}{n!}(fg)[\omega'^n]$$

ou

$$(fg)\,[\omega'^n] = n[\omega'^{n-1} df\, dg].$$

La quantité (fg) ainsi définie porte le nom de *parenthèse de Poisson* : c'est une forme bilinéaire alternée des dérivées partielles de f et g.

La parenthèse de deux intégrales premières est encore une intégrale première.

Ce théorème, dû à Poisson dans le cas particulier des équations canoniques, a eu son importance mise en évidence par Jacobi.

Avant de passer aux applications de ce théorème, nous pourrons faire quelques remarques.

La condition $(fg) = 0$ exprime que le rang de ω' est égal à $2n - 4$: on dit dans ce cas que les intégrales f et g sont *en involution*.

Si cette condition n'est pas remplie, la formule de définition de (fg) exprime que la forme

$$\omega' - \frac{[df dg]}{(fg)}$$

est de rang $2n - 2$; la puissance $n^{\text{ième}}$ de cette forme est en effet

$$[\omega'^n] - \frac{n}{(fg)}\,[\omega'^{n-1} df dg] = 0.$$

Remarquons encore que si on a réduit ω' à sa forme normale

$$\omega' = [\omega_1\omega_2] + [\omega_3\omega_4] + \dots + [\omega_{2n-1}\omega_{2n}],$$

et si on pose

$$df = f_1\omega_1 + f_2\omega_2 + \dots + f_{2n}\omega_{2n},$$
$$dg = g_1\omega_1 + g_2\omega_2 + \dots + g_{2n}\omega_{2n},$$

on a

$$(fg) = f_1g_2 - f_2g_1 + f_3g_4 - f_4g_3 + \dots + f_{2n-1}g_{2n} - f_{2n}g_{2n-1}.$$

Remarquons enfin, d'après ce qui a été vu plus haut (nº **118**), qu'on peut toujours supposer les ω_i des différentielles exactes. Un calcul facile donne alors l'identité suivante, due à Jacobi,

$$((fg)h) + ((gh)f) + ((hf)g) = 0,$$

qui s'applique à trois intégrales premières quelconques f, g, h.

Mais la vérification peut se faire aussi sans rien supposer sur les formes linéaires $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$. Elle repose sur l'identité

$$(1) \quad \frac{1}{(n-1)!}\,[\omega'^{n-1}((fg)dh + (gh)df + (hf)dg)] = \frac{1}{(n-2)!}\,[\omega'^{n-2} df dg dh]$$

qui n'est autre que l'identité (8) démontrée au nº **68**. En la dérivant extérieurement et remarquant que la dérivée extérieure du second membre est nulle, on obtient

$$[\omega'^{n-1} d(fg)dh] + [\omega'^{n-1} d(gh)df] + [\omega'^{n-1} d(hf)dg] = 0,$$

qui n'est autre que l'identité de Jacobi.

123. La méthode d'intégration indiquée au début du Chapitre peut être énoncée en utilisant les parenthèses de Poisson. Soit

$$Xf = 0$$

l'équation qui exprime que f est une intégrale première. On cherche d'abord une solution particulière y_1 de cette équation ; on cherche ensuite une solution particulière y_2 du système

$$Xf = 0, \quad (y_1 f) = 0,$$

puis une solution particulière y_3 du système

$$Xf = 0, \quad (y_1 f) = 0, \quad (y_2 f) = 0$$

et ainsi de suite jusqu'à une solution particulière y_n du système

$$Xf = 0, \quad (y_1 f) = 0, \quad (y_2 f) = 0, \ldots, (y_{n-1} f) = 0.$$

Dans le cas des équations canoniques de la Dynamique

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

correspondant à la forme invariante

$$\omega' = \sum_{i=1}^{i=n} [\delta p_i \delta q_i] - [\delta H \delta t],$$

l'équation aux dérivées partielles des intégrales premières des équations données est

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Quant à la parenthèse de Poisson (fg) de deux intégrales premières, elle est définie par l'égalité

$$n[\omega'^{n-1} \delta f \delta g] = (fg)\,[\omega'^n];$$

égalons dans les deux membres les termes en

$$[\delta p_1 \delta q_1 \delta p_2 \ldots \delta p_n \delta q_n];$$

nous obtenons

$$(fg) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

L'équation aux dérivées partielles des intégrales premières peut alors s'écrire, en étendant la définition de la parenthèse (fg) à deux fonctions quelconques des q_i, p_i et t,

$$\frac{\partial f}{\partial t} - (Hf) = 0.$$

III. — *Utilisation d'intégrales premières connues.*

124. Nous allons maintenant reprendre le problème de l'intégration des équations caractéristiques de la forme différentielle ω' en supposant connues

un certain nombre (quelconque) d'intégrales premières $y_1, y_2, \ldots, y_p$. En égalant ces intégrales à des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_p$, la forme ω' a son rang réduit d'un certain nombre pair $2p' \leqslant 2p$ d'unités. Il suffit alors d'intégrer les équations caractéristiques de cette nouvelle forme, ou plutôt d'en chercher $n-p'$ intégrales premières en involution : on est alors ramené au problème du n° **120**.

La méthode précédente ne tire pas en général tout le parti possible des intégrales connues. En effet, d'après le théorème de Poisson-Jacobi, les parenthèses des p intégrales données prises deux à deux sont elles-mêmes des intégrales premières des équations à intégrer. On formera donc les parenthèses $(y_i y_j)$, puis, si elles fournissent des intégrales nouvelles, les parenthèses de ces intégrales entre elles et avec les intégrales données, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'opération ne donne rien de nouveau. Cela revient à dire qu'*on peut toujours, par des différentiations préalables, supposer que les parenthèses $(y_i y_j)$ sont des fonctions des intégrales premières $y_1, y_2, \ldots, y_p$.*

Pour savoir maintenant de combien d'unités se réduit le rang de ω' quand on suppose les variables liées par les relations

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \ldots, y_p = C_p,$$

il suffit d'appliquer le théorème du n° **69** à la forme quadratique extérieure ω' construite avec les variables $\delta x_1, \ldots, \delta x_{2n+1}$ liées par les relations

$$\delta y_1 = 0, \quad \delta y_2 = 0, \ldots, \delta y_p = 0.$$

Les coefficients a_{ij} du n° **69** sont ici les parenthèses $(y_i y_j)$ et la forme quadratique $\overline{\Phi}$ est ici

$$\overline{\Phi} = \sum (y_i y_j)[\xi_i \xi_j];$$

le nombre d'unités dont se réduit le rang de ω' est égal au nombre maximum $2p$ diminué du rang de la forme Φ.

125. On peut se rendre compte de la manière suivante du fait que tout le parti possible a bien été tiré des intégrales premières données.

Effectuons sur les p variables $\xi_1, \ldots, \xi_p$ une substitution linéaire (à coefficients fonctions de $y_1, \ldots, y_p$) de manière à ramener $\overline{\Phi}$ à sa forme normale

$$\overline{\Phi} = [\overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2}] + \ldots + [\overline{\xi_{2q-1}}\,\overline{\xi_{2q}}] \qquad (2q \leqslant p).$$

Cela revient à remplacer les formes linéaires $\delta y_1, \ldots, \delta y_p$ par de nouvelles formes différentielles

$$\varpi_1, \ldots, \varpi_p,$$

linéaires en $\delta y_1, \ldots, \delta y_p$ avec des coefficients fonctions de $y_1, \ldots, y_p$ et telles que l'on ait identiquement

$$\xi_1 \delta y_1 + \xi_2 \delta y_2 + \ldots + \xi_p \delta y_p = \overline{\xi_1}\varpi_1 + \overline{\xi_2}\varpi_2 + \ldots + \overline{\xi_p}\varpi_p.$$

La forme quadratique extérieure ω' prendra alors la forme

$$\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] + [\varpi_{2q+1}\omega_1] + \ldots + [\varpi_p\omega_{p-2q}] \\ + [\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}] + \ldots + [\omega_{2n-p-1}\omega_{2n-p}],$$

en introduisant $2n - p$ formes linéaires nouvelles $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-p}$.

Désignons par Π la forme

$$\Pi = [\varpi_1\varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}]$$

et exprimons que la dérivée extérieure de ω' est nulle. Si nous négligeons tous les termes qui contiennent l'une des formes linéaires

$$\varpi_{2q+1}, \ldots, \varpi_p; \qquad \omega_{p-2q+1}, \ldots, \omega_{2n-p},$$

nous obtenons

$$(2) \qquad \Pi' + [\varpi'_{2q+1}\omega_1] + \ldots + [\varpi'_p\omega_{p-2q}] = 0.$$

Comme la forme Π est construite avec les seules fonctions y_i et leurs différentielles, il en est de même de Π'; par suite aucune réduction de termes semblables ne peut se faire entre les différentes parties du premier membre de (2). Il en résulte en particulier que chacune des formes

$$\varpi'_{2q+1}, \ldots, \varpi'_p$$

est nulle (en supposant nulles les formes $\varpi_{2q+1}, \ldots, \varpi_p$); par suite *le système de Pfaff*

$$\varpi_{2q+1} = \ldots = \varpi_p = 0$$

est complètement intégrable. Nous désignerons par

$$\bar{y}_{2q+1}, \ldots, \bar{y}_p$$

un système d'intégrales premières de ces équations. On a de plus

$$\Pi' = 0,$$

toujours en regardant les formes $\varpi_{2q+1}, \ldots, \varpi_p$ comme nulles; autrement dit, si on suppose $\bar{y}_{2q+1}, \ldots, \bar{y}_p$ constantes, la forme Π est dérivée exacte, et par suite (nº **118**) réductible à

$$\Pi = [d\bar{y}_1\, d\bar{y}_2] + \ldots + [d\bar{y}_{2q-1}\, d\bar{y}_{2q}].$$

Finalement on voit facilement qu'on peut mettre ω' sous la forme

$$(3) \qquad \omega' = [d\bar{y}_1\, d\bar{y}_2] + \ldots + [d\bar{y}_{2q-1}\, d\bar{y}_{2q}] + [d\bar{y}_{2q+1}\, \bar{\omega}_1] + \ldots \\ + [d\bar{y}_p\, \bar{\omega}_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1}\, \omega_{p-2q+2}] + \ldots$$

Cela revient au fond au théorème suivant :

On peut trouver p fonctions

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_p$$

des p intégrales premières données satisfaisant aux conditions

$$(\bar{y}_1\bar{y}_2) = \ldots = (\bar{y}_{2q-1}\,\bar{y}_{2q}) = 1,$$

toutes les autres parenthèses $(\bar{y}_i\bar{y}_j)$ étant nulles.

126. Outre l'intérêt intrinsèque que présente ce théorème, sa forme met en évidence le fait énoncé ci-dessus que la méthode d'intégration indiquée a tiré tout le parti possible des intégrales données. La forme (3) trouvée pour ω' permet en effet d'écrire

$$\begin{aligned}\omega = dS + \bar{y}_1 d\bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q} + w_1 d\bar{y}_{2q+1} + \ldots \\ + w_{p-2q} d\bar{y}_p + v_1 du_1 + \ldots + v_{n-p+q} du_{n-p+q},\\ \omega' = [d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \ldots + [d\bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q}] + [dw_1 d\bar{y}_{2q+1}] + \ldots \\ + [dw_{p-2q} d\bar{y}_p] + [dv_1 du_1] + \ldots + [dv_{n-p+q} du_{n-p+q}].\end{aligned}$$

Le groupe des transformations les plus générales sur les courbes intégrales qui *conservent les données*, c'est-à-dire qui laissent invariantes ω', $y_1, \ldots, y_p$, est défini par les équations suivantes, où les lettres accentuées indiquent les variables transformées, et où V désigne une fonction arbitraire des arguments u_i, u_i', $\bar{y}_{2q+1}, \ldots, \bar{y}_p$:

$$\begin{gathered}\bar{y}_i' = \bar{y}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),\\ v_1' = \frac{\partial V}{\partial u_1'}, \ldots, v'_{n-p+q} = \frac{\partial V}{\partial u'_{n-p+p}},\\ v_1 = -\frac{\partial V}{\partial u_1}, \ldots, v_{n-p+q} = -\frac{\partial V}{\partial u_{n-p+q}},\\ w_1' = w_1 + \frac{\partial V}{\partial \bar{y}_{2q+1}}, \ldots, w'_{p-2q} = w_{p-2q} + \frac{\partial V}{\partial \bar{y}_{p-2q}}.\end{gathered}$$

Tout procédé univoque qui, en partant de ω' et de p intégrales premières $y_1, \ldots, y_p$, permettrait de déduire une autre intégrale première par des opérations *ayant une signification indépendante du choix des variables*, conduirait nécessairement à une intégrale première invariante par le groupe de transformations le plus général conservant ω', $y_1, \ldots, y_p$; or les seules fonctions invariantes par ce groupe sont évidemment les fonctions arbitraires de $y_1, \ldots, y_p$.

IV. — *Généralisation du théorème de Poisson-Jacobi.*

127. Le théorème de Poisson-Jacobi se généralise immédiatement si, au lieu de deux intégrales premières, on connaît deux formes linéaires invariantes ϖ_1 et ϖ_2 : la quantité α définie par l'égalité

$$n[\omega'^{n-1}\varpi_1\varpi_2] = \alpha[\omega'^n] \tag{4}$$

est évidemment une intégrale première ; elle se réduit à $(y_1 y_2)$ si ϖ_1 et ϖ_2 sont les différentielles de deux intégrales premières y_1, y_2.

Appliquons cette remarque au cas où, les équations caractérisques de ω' admettant deux transformations infinitésimales $A_1 f$ et $A_2 f$, on aurait

$$\varpi_1 = \omega'(A_1, \delta), \qquad \varpi_2 = \omega'(A_2, \delta).$$

Pour calculer dans ce cas la quantité α, appliquons aux deux membres de l'égalité (4) l'opération qui fait passer d'une forme invariante $\Omega(\delta)$ à la forme $\Omega(A_1, \delta)$. On obtient

$$n(n-1)[\omega'^{n-2}\varpi_1\varpi_1\varpi_2] - n[\omega'^{n-1}\varpi_1]\varpi_2(A_1) = n\alpha[\omega'^{n-1}\varpi_1],$$

d'où, comme la forme $[\omega'^{n-1}\varpi_1]$ n'est certainement pas nulle,

$$\alpha = -\varpi_2(A_1) = \omega'(A_1, A_2) = \varpi_1(A_2).$$

Le théorème généralisé de Poisson-Jacobi, appliqué aux deux formes invariantes $\omega'(A_1, \delta)$ *et* $\omega'(A_2, \delta)$, *conduit donc à l'intégrale première* $\omega'(A_1, A_2)$ *fournie par l'application deux fois répétée à* ω' *de l'opération correspondant aux transformations infinitésimales* $A_1 f$ *et* $A_2 f$.

CHAPITRE XIII.

LES ÉQUATIONS QUI ADMETTENT UN INVARIANT INTÉGRAL LINÉAIRE ABSOLU.

I. — *Méthode générale d'intégration.*

128. Soit ω une forme différentielle linéaire; son covariant bilinéaire ω' est de rang pair, soit $2n$. Deux cas peuvent se présenter, suivant que l'équation $\omega = 0$ ne fait pas partie ou fait partie du système caractéristique de ω'. Nous allons d'abord nous occuper du premier cas.

I. On peut évidemment poser

$$\omega' = [\omega_1\omega_2] + \ldots + [\omega_{2n-1}\omega_{2n}],$$

les $2n+1$ formes $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ étant indépendantes. Dans ce cas les équations caractéristiques de ω sont (n° **78**)

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n} = 0.$$

On peut facilement indiquer une forme réduite pour ω. En effet des opérations d'ordres

$$2n,\ 2n-2,\ \ldots,\ 2$$

font connaître successivement n intégrales premières

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

des équations caractéristiques de ω', réduisant son rang à zéro quand on les égale à des constantes arbitraires. Une quadrature met alors ω sous la forme

$$\omega = du + z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \ldots + z_n dy_n.$$

Telle est la forme réduite cherchée, qui s'obtient par des opérations d'ordres

$$2n,\ 2n-2,\ \ldots,\ 2,\ 0$$

et qui, une fois obtenue, donne la solution générale des équations caractéristiques de ω.

On voit que dans ce cas l'intégration des équations caractéristiques de ω' et celle des équations caractéristiques de ω sont deux problèmes équivalents, et le fait que $\int \omega$ est un invariant intégral *absolu* n'a pas plus d'importance pour l'intégration que si $\int \omega$ était un invariant intégral *relatif*. Cela est vrai du moins si l'on suit, pour l'intégration des équations caractéristiques de ω', la méthode indiquée au n° **118** ; il n'en serait plus de même si on appliquait la méthode du n° **121**.

II. Dans le second cas on peut poser

$$\omega' = [\omega\,\omega_1] + [\omega_2\omega_3] + \dots + [\omega_{2n-2}\omega_{2n-1}]$$

avec $2n$ formes linéairement indépendantes $\omega, \omega_1, \dots, \omega_{2n-1}$. Les équations

$$\omega = 0, \qquad \omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_{2n-1} = 0,$$

qui s'obtiennent en écrivant, en outre de l'équation $\omega = 0$, les équations du système associé de la forme ω', *où on suppose les différentielles liées par la relation* $\omega = 0$, ont une signification intrinsèque. C'est le système associé des deux formes ω et $[\omega\omega']$ et par suite (n° **103**) *c'est le système caractéristique de l'équation de Pfaff* $\omega = 0$. Nous l'appellerons le système (Σ), en désignant par (S) le sytème caractéristique de ω, lequel contient en plus l'équation $\omega_1 = 0$.

On peut, par une opération d'ordre $2n - 1$, obtenir une intégrale première y_1 du système (Σ). En l'égalant à une constante arbitraire, le système (Σ) de la nouvelle forme ω, c'est-à-dire le système caractéristique de la nouvelle équation $\omega = 0$, a le nombre de ses équations réduit de deux unités ; on pourra donc par des opérations d'ordres

$$2n - 3, \dots, 3,$$

trouver de nouvelles intégrales

$$y_2, \dots, y_{n-1}$$

telles qu'en les égalant à de nouvelles constantes arbitraires, le nouveau système (Σ) correspondant à ω ne contienne plus qu'une équation, qui sera évidemment $\omega = 0$. Cela veut dire que cette équation est complètement intégrable et une nouvelle opération d'ordre 1 donne une nouvelle intégrale y_n qui permet d'écrire

$$\omega = z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \dots + z_n dy_n.$$

On arrive ainsi à la *forme réduite* de ω, qui fait effectivement intervenir le nombre minimum $2n$ de variables, $2n$ étant le nombre des équations du système (S) caractéristique de ω, c'est-à-dire la classe de ω.

On trouve sans difficulté la transformation la plus générale effectuée sur les variables caractéristiques y_i et z_i qui conserve la forme ω ; l'égalité

$$z_1' dy_1' + \dots + z_n' dy_n' = z_1 dy_1 + \dots + z_n dy_n$$

donne, en restant dans le cas le plus général,

$$V(y_1', \ldots, y_n', y_1, \ldots, y_n) = 0,$$

$$\frac{z_1'}{\dfrac{\partial V}{\partial y_1'}} = \frac{z_2'}{\dfrac{\partial V}{\partial y_2'}} = \ldots = \frac{z_n'}{\dfrac{\partial V}{\partial y_n'}} = \frac{-z_1}{\dfrac{\partial V}{\partial y_1}} = \ldots = \frac{-z_n}{\dfrac{\partial V}{\partial y_n}}.$$

Ces formules montrent bien que les variables $y_1, \ldots, y_n, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}$ sont transformées entre elles ; ce sont les variables en nombre minimum au moyen desquelles peut s'écrire l'équation $\omega = 0$; ce sont les intégrales premières du système (Σ) caractéristique de cette équation.

S'il existait p relations indépendantes

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \ldots, V_p = 0$$

entre les y_i et les y_i', les formules qui définissent la transformation seraient

$$z_i' = \lambda_1 \frac{\partial V_1}{\partial y_i'} + \lambda_2 \frac{\partial V_2}{\partial y_i'} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial V_p}{\partial y_i'},$$

$$-z_i = \lambda_1 \frac{\partial V_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial V_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial V_p}{\partial y_i},$$

avec p inconnues auxiliaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

129. On remarquera, au point de vue de l'intégration, la différence entre les deux cas où le système caractéristique de ω est impair $(2n+1)$ ou pair $(2n)$: dans le premier cas l'intégration exige des opérations d'ordres

$$2n, 2n-2, \ldots, 2, 0 ;$$

dans le second cas elle exige des opérations d'ordres

$$2n-1, 2n-3, \ldots, 1.$$

On remarquera aussi que les deux cas se distinguent pratiquement l'un de l'autre de la manière suivante. Soit $2n$ le rang de ω', c'est-à-dire soit n le plus grand exposant tel que la forme $[\omega'^n]$ ne soit pas nulle ; *dans le premier cas* $[\omega\omega'^n]$ *n'est pas nul ; dans le second cas* $[\omega\omega'^n]$ *est nul.*

III. — *Généralisation des formules de Poisson-Jacobi.*

130. I. *Supposons que la forme ω soit du premier type.* — Soit f une intégrale première quelconque de son système caractéristique ; la forme $[\omega'^n df]$ est invariante et d'ordre maximum $2n+1$. On peut donc poser

$$[\omega'^n df] = \{f\} [\omega\omega'^n],$$

où $\{f\}$ est une quantité finie linéaire par rapport aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction f. *Cette quantité $\{f\}$ est, ou une constante, ou une intégrale première des équations caractéristiques de ω.*

Soient maintenant deux intégrales premières f et g des équations caractéristiques de ω. On peut définir une quantité (fg) par la relation

$$n[\omega\omega'^{n-1}df dg] = (fg)[\omega\omega'^n];$$

cette quantité (fg) est encore une constante ou une intégrale première.

Si la forme ω a été réduite :

$$\omega = du + z_1 dy_1 + \ldots + z_n dy_n,$$

on a

$$\{f\} = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$(fg) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\frac{\partial g}{\partial y_i} - z_i \frac{\partial g}{\partial u}\right) - \frac{\partial g}{\partial z_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - z_i \frac{\partial f}{\partial u}\right).$$

De là on peut déduire sans difficulté les identités importantes

$$\{(fg)\} = (\{f\}g) + (f\{g\}),$$
$$((fg)h) + ((gh)f) + ((hf)g) = (fg)\{h\} + (gh)\{f\} + (hf)\{g\}.$$

131. Pour démontrer directement ces identités, remarquons que la forme $df - \{f\}\omega$ est une combinaison linéaire des $2n$ formes linéaires indépendantes au moyen desquelles peut s'exprimer ω', puisqu'on a

$$[\omega'^n(df - \{f\}\omega)] = 0.$$

On en déduit immédiatement une identité de la forme

$$n[\omega'^{n-1}(df - \{f\}\omega)(dg - \{g\}\omega)] = \lambda[\omega'^n]$$

et la multiplication extérieure par ω donne $\lambda = (fg)$. On a donc

$$(1)\quad n[\omega'^{n-1} df dg] - n\{f\}[\omega\omega'^{n-1}dg] + n\{g\}[\omega\omega'^{n-1}df] = (fg)[\omega'^n].$$

L'identité (8) du nº **68**, appliquée aux trois formes linéaires $df - \{f\}\omega$, $dg - \{g\}\omega$, $dh - \{h\}\omega$, donne alors

$$(fg)[\omega'^{n-1}(dh - \{h\}\omega)] + (gh)[\omega'^{n-1}(df - \{f\}\omega)] + (hf)[\omega'^{n-1}(dg - \{g\}\omega)]$$
$$= (n-1)[\omega'^{n-2}(df - \{f\}\omega)(dg - \{g\}\omega)(dh - \{h\}\omega)],$$

d'où on déduit, par multiplication par ω,

$$(2)\quad [\omega\omega'^{n-1}((fg)dh + (gh)df + (hf)dg)] = (n-1)[\omega\omega'^{n-2}df dg dh].$$

Cela posé la dérivation extérieure de l'identité (1) donne

$$n[\omega\omega'^{n-1}d\{f\}dg] + n[\omega\omega'^{n-1}df d\{g\}] = [\omega'^n d(fg)],$$

c'est-à-dire la première identité à démontrer :

$$(\{f\}g) + (f\{g\}) = \{(fg)\}.$$

La dérivation extérieure de l'identité (2) donne ensuite

$$[\omega'^n((fg)dh + (gh)df + (hf)dg)] - [\omega\omega'^{n-1}d(fg)dh] - [\omega\omega'^{n-1}d(gh)df]$$
$$- [\omega\omega'^{n-1}d(hf)dg] = (n-1)[\omega'^{n-1}df dg dh];$$

mais d'autre part la multiplication extérieure de (1) par dh donne

$$n[\omega'^{n-1}df\,dg\,dh] - n\{f\}[\omega\omega'^{n-1}dg\,dh] + n\{g\}[\omega\omega'^{n-1}df\,dh] = (fg)[\omega'^{n}dh];$$

on déduit de cette dernière formule

$$n[\omega'^{n-1}df\,dg\,dh] = [\{f\}(gh) + \{g\}(hf) + \{h\}(fg)][\omega\omega'^{n}]$$

et de la précédente l'identité à démontrer

$$(fg)\{h\} + (gh)\{f\} + (hf)\{g\} = ((fg)h) + ((gh)f) + ((hf)g).$$

132. *Supposons maintenant que la forme ω soit du second type.* — On définira de même, étant données deux intégrales premières f et g des équations caractéristiques de ω, les quantités $\{f\}$ et (fg) par les formules

$$n[\omega\omega'^{n-1}df] = \{f\}[\omega'^{n}],$$
$$n[\omega'^{n-1}df\,dg] = (fg)[\omega'^{n}].$$

Si ω est la forme réduite

$$\omega = z_1dy_1 + z_2dy_2 + \dots + z_ndy_n,$$

on a

$$\{f\} = -\left(z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_2} + \dots + z_n\frac{\partial f}{\partial z_n}\right),$$
$$(fg) = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial z_i}\right).$$

On vérifie alors sans difficulté les formules

(3) $$\{(fg)\} = (fg) + (\{f\}g) + (f\{g\});$$

(4) $$((fg)h) + ((gh)f) + ((hf)g) = 0,$$

dont la seconde n'est autre que l'identité de Jacobi, puisque f, g, h sont des intégrales premières des équations caractéristiques de ω'.

Pour démontrer directement la première identité appliquons l'identité (8) du n° **68** aux trois formes linéaires ω, df, dg; les relations

$$n[\omega'^{n-1}\omega\,df] = \{f\}[\omega'^{n}],$$
$$n[\omega'^{n-1}df\,dg] = (fg)[\omega'^{n}],$$
$$n[\omega'^{n-1}dg\,\omega] = -\{g\}[\omega'^{n}],$$

conduisent à l'identité

$$[\omega'^{n-1}(\{f\}dg + (fg)\omega - \{g\}df)] = (n-1)[\omega'^{n-2}\omega\,df\,dg]$$

qui, dérivée extérieurement, donne

$$[\omega'^{n-1}d\{f\}dg] + [\omega'^{n-1}df\,d\{g\}] + (fg)[\omega'^{n}] - [\omega\omega'^{n-1}d(fg)]$$
$$= (n-1)[\omega'^{n-1}df\,dg];$$

en remplaçant chaque terme par sa valeur et simplifiant, on obtient l'identité à démontrer.

III. — *Utilisation d'intégrales premières connues.*

133. *Supposons que la forme* ω *soit du premier type* et que nous connaissions p intégrales premières indépendantes $y_1, \ldots, y_p$ de ses équations caractéristiques. Nous formerons les quantités $\{ y_i \}$, $(y_i y_j)$; si elles introduisent des intégrales nouvelles, nous les ajouterons à celles qui sont données et nous recommencerons l'opération jusqu'à ce qu'elle ne donne plus aucune intégrale nouvelle. Nous pouvons donc supposer ce premier résultat obtenu, c'est-à-dire que les quantités $\{ y_i \} = a_i$, $(y_i y_j) = a_{ij}$ sont des fonctions de $y_1, \ldots, y_p$.

Si nous introduisons maintenant des variables auxiliaires $\xi_1, \ldots, \xi_p$, nous obtenons deux formes, l'une linéaire

$$\varphi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_p\xi_p,$$

l'autre quadratique extérieure

$$\Phi = \Sigma a_{ij}[\xi_i\xi_j] ;$$

la première indique la valeur de la quantité $\{ f \}$ lorsque f est une fonction arbitraire de $y_1, \ldots, y_p$ admettant pour dérivées partielles $\xi_1, \ldots, \xi_p$; la seconde, ou plutôt la forme bilinéaire alternée qui lui correspond

$$\Sigma a_{ij}\xi_i\eta_j,$$

indique la valeur de la parenthèse (fg).

Cela posé nous allons, par une substitution linéaire convenable sur les variables ξ_i, réduire les deux formes précédentes.

Trois cas sont possibles ; la forme Φ étant réduite à

$$\Phi = [\xi_1'\xi_2'] + \ldots + [\xi'_{2q-1}\xi'_{2q}],$$

on peut avoir

a) $$\varphi = 0,$$
b) $$\varphi = \xi_1'.$$
c) $$\varphi = \xi'_{2q+1}.$$

Une substitution linéaire à coefficients fonctions des y_i, effectuée sur les δy_i, donnera p formes différentielles $\varpi_1, \ldots, \varpi_p$ satisfaisant à l'identité

$$\xi_1'\varpi_1 + \xi_2'\varpi_2 + \ldots + \xi_p'\varpi_p = \xi_1\delta y_1 + \xi_2\delta y_2 + \ldots + \xi_p\delta y_p.$$

Cela posé *dans le cas* a), toutes les formes

$$[\omega'^n\varpi_i], \qquad [\omega\omega'^{n-1}\varpi_i\varpi_j]$$

sont nulles, sauf

$$n[\omega\omega'^{n-1}\varpi_1\varpi_2] = \ldots = n\omega'^{n-1}[\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] = [\omega\omega'^n].$$

On en déduit facilement

$$\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] + [\varpi_{2q+1}\omega_1] + \ldots + [\varpi_p\omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}] + \ldots$$

En égalant les y_i à des constantes arbitraires, la forme ω reste du premier type et le rang de ω' est réduit de $2p - 2q$ unités. Le cas est identique à celui qui a été étudié dans le Chapitre précédent, les intégrales premières données étant des intégrales du système caractéristique de ω'.

Dans le cas **b**), on a

$$[\omega'^n(\varpi_1 - \omega)] = [\omega'^n\varpi_2] = \ldots = [\omega'^n\varpi_p] = 0,$$

et ω' est réductible à la forme

$$\omega' = [(\varpi_1 - \omega)\varpi_2] + [\varpi_3\varpi_4] + \ldots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] \\ + [\varpi_{2q+1}\omega_1] + \ldots + [\varpi_p\omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}] + \ldots$$

En égalant les y_i à des constantes arbitraires, la forme ω reste encore du premier type et le rang de ω' est réduit de $2p - 2q$ unités.

Dans le cas **c**), on a

$$[\omega'^n\varpi_1] = \ldots = [\omega'^n\varpi_{2q}] = [\omega'^n(\varpi_{2q+1} - \omega)] = \ldots = [\omega'^n\varpi_p] = 0\,;$$

la forme ω' est réductible à

$$\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] + [(\varpi_{2q+1} - \omega)\omega_1] + \ldots \\ + [\varpi_p\omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}] + \ldots$$

En égalant les y_i à des constantes arbitraires, la forme ω devient du second type, le rang de ω' est réduit de $2p - 2q - 2$ unités ; le système caractéristique de la nouvelle équation $\omega = 0$ est formé de $2n - 2p + 2q + 1$ équations. Dans ce cas l'intégration exige des opérations d'ordres

$$2n - 2p + 2q + 1, \ldots, 3, 1,$$

tandis que, dans les cas **a**) et **b**), elle exige des opérations d'ordres

$$2n - 2p + 2q, \ldots, 2, 0.$$

En résumé la forme ω reste du premier type si le produit extérieur $[\varphi\Phi]$ est nul, et devient du second type dans le cas contraire.

134. *Supposons maintenant que la forme ω soit du second type.* — Nous avons encore ici deux formes

$$\varphi = a_1\xi_1 + \ldots + a_p\xi_p,$$
$$\Phi = \Sigma a_{ij}[\xi_i\xi_j].$$

Les coefficients a_{ij} étant donnés par les équations

$$n[\omega'^{n-1}\,dy_i dy_j] = a_{ij}[\omega'^n],$$

le rang de ω' est réduit de $2p - 2q$ unités lorsqu'on égale les intégrales y_i à des constantes arbitraires, si $2q$ est le rang de la forme Φ.

La forme Φ étant réduite à sa forme normale

$$\Phi = [\xi_1'\xi_2'] + \ldots + [\xi'_{2q-1}\xi'_{2q}],$$

on peut supposer qu'on a en même temps, pour φ, l'une des trois formes suivantes :

a) $$\varphi = 0,$$
b) $$\varphi = \xi_1',$$
c) $$\varphi = \xi'_{2q+1}.$$

Le cas a), d'après l'identité (3), exige que toutes les parenthèses $(y_i y_j)$ soient nulles, c'est-à-dire que la forme Φ soit identiquement nulle. On a donc $q = 0$. Dans ce cas on a évidemment

$$\omega' = [\omega\omega_1] + [\varpi_1\omega_2] + \ldots + [\varpi_p\omega_{p+1}] + [\omega_{p+2}\,\omega_{p+3}] + \ldots$$

La forme ω reste du second type, le nombre n étant diminué de p unités.

Dans le cas b), on a

$$n[\omega'^{n-1}\,\omega\varpi_1] = n[\omega'^{n-1}\,\varpi_1\varpi_2] = \ldots = n[\omega'^{n-1}\,\varpi_{2q-1}\,\varpi_{2q}] = [\omega'^{n}],$$

et ω' est réductible à la forme

$$\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2q-1}\,\varpi_{2q}] + [(\omega + \varpi_2)\omega_1] + [\varpi_{2q+1}\,\omega_2] + \ldots + [\varpi_p\omega_{p-2q+1}] + [\omega_{p-2q+2}\,\omega_{p-2q+3}] + \ldots$$

En égalant les y_i à des constantes arbitraires, la forme ω reste du second type, le rang de ω' étant diminué de $2p - 2q$ unités.

Dans le cas c), ω' est réductible à la forme

$$\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2q-1}\,\varpi_{2q}] + [\omega\varpi_{2q+1}] + [\varpi_{2q+2}\,\omega_1] + \ldots + [\varpi_p\omega_{p-2q-1}] + [\omega_{p-2q}\,\omega_{p-2q+1}] + \ldots$$

En égalant les y_i à des constantes arbitraires, la forme ω devient du premier type, le rang de ω' étant diminué de $2p - 2q$ unités.

En résumé la forme ω' reste du second type si le produit $[\varphi\Phi]$ est nul, et devient du premier type dans le cas contraire.

135. Nous avons en résumé obtenu quatre problèmes réduits essentiellement distincts, en faisant abstraction des deux cas a) dont l'un a été traité dans le Chapitre précédent et l'autre correspond à la connaissance de p intégrales premières en involution du système caractéristique de l'équation $\omega = 0$.

On peut examiner d'un peu plus près les quatre problèmes réduits et se demander si tout le parti possible a été tiré des intégrales premières connues. La méthode pour répondre à cette question est la même que celle qui a été employée dans le Chapitre précédent ; elle repose sur la réduction de ω à une forme canonique faisant intervenir p fonctions convenablement choisies de $y_1, \ldots, y_p$ et d'autres intégrales premières indépendantes. Cette forme canonique étant obtenue, on en déduit les équations du plus grand groupe de transformations qui, effectuées sur les courbes intégrales, conservent les données.

Nous allons indiquer rapidement les formes canoniques de ω et ω' dans chacun des quatre cas, les calculs pour y arriver se faisant de la même manière qu'au Chapitre précédent (n° **125**).

1° *La forme* ω *est du premier type et les formes* φ *et* Φ *sont réductibles à*

$$\varphi = \xi_1', \quad \Phi = [\xi_1'\xi_2'] + \dots + [\xi'_{2q-1}\xi'_{2q}].$$

On a dans ce cas

$$\omega' = [(\varpi_1 - \omega)\varpi_2] + [\varpi_3\varpi_4] + \dots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] \\ + [\varpi_{2q+1}\omega_1] + \dots + [\varpi_p\omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}] + \dots$$

En posant

$$\Pi = [\varpi_1\varpi_2] + \dots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}],$$

la dérivation extérieure de ω' donne, si on néglige les termes en

$$\varpi_{2q+1}, \dots, \varpi_p, \omega_{p-2q+1}, \dots, \omega_{2n-p},$$

l'identité

$$\Pi' - [\Pi\varpi_2] + [\omega\varpi_2'] + [\varpi'_{2q+1}\omega_1] + \dots + [\varpi_p'\omega_{p-2q}] = 0.$$

On peut alors poser

$$\varpi_2 = \frac{d\bar{y}_2}{\bar{y}_2}, \quad \varpi_{2q+1} = d\bar{y}_{2q+1}, \dots, \varpi_p = d\bar{y}_p;$$

la dérivée extérieure de la forme $\frac{1}{\bar{y}_2}\Pi$ étant nulle, on peut ensuite poser

$$\Pi = \bar{y}_2([d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \dots + [d\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}]).$$

On a finalement

$$\omega' = \left[\frac{d\bar{y}_2}{\bar{y}_2}\omega\right] + \bar{y}_2[d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \dots + \bar{y}_2[d\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}] \\ + [d\bar{y}_{2q+1}\bar{\omega}_1] + \dots + [d\bar{y}_p\bar{\omega}_{p-2q}] + \dots$$

Le résultat peut être mis sous une forme plus intuitive, en posant

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\bar{y}_2}\omega - \bar{y}_1 d\bar{y}_2 - \dots - \bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}.$$

On obtient en effet

$$\bar{\omega}' = [d\bar{y}_{2q+1}\bar{\omega}_1] + \dots + [d\bar{y}_p\bar{\omega}_{p-2q}] + [\bar{\omega}_{p-2q+1}\bar{\omega}_{p-2q+2}] + \dots + [\bar{\omega}_{2n-p-1}\bar{\omega}_{2n-p}].$$

Sous cette forme on voit avec évidence que tout le parti possible a été tiré des intégrales connues.

On a en outre obtenu les relations canoniques

$$\{\bar{y}_1\} = 1, \quad \{\bar{y}_i\} = 0 \quad (i = 2, \dots, p);$$
$$(\bar{y}_1\bar{y}_2) = (\bar{y}_3\bar{y}_4) = \dots = (\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q}) = \bar{y}_2,$$

toutes les autres parenthèses étant nulles.

2° *La forme* ω *est du premier type et les formes* φ *et* Φ *sont réductibles à*

$$\varphi = \xi'_{2q+1}, \quad \Phi = [\xi_1'\xi_2'] + \dots + [\xi'_{2q-1}\xi'_{2q}].$$

On a dans ce cas

$$\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \dots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] + [(\varpi_{2q+1} - \omega)\omega_1] + \dots$$
$$+ [\varpi_p\omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1}\,\omega_{p-2q+2}] + \dots$$

La dérivation extérieure du second membre montre facilement qu'on peut poser

$$\varpi_{2q+2} = d\bar{y}_{2q+2}, \dots, \varpi_p = d\bar{y}_p,$$
$$\varpi_{2q+1} = d\bar{y}_{2q+1} + \bar{y}_1 d\bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q},$$
$$\Pi = [d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + [d\bar{y}_3 d\bar{y}_4] + \dots + [d\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}].$$

En posant

$$\bar{\omega} = -\omega + d\bar{y}_{2q+1} + \bar{y}_1 d\bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q},$$

on obtient

$$\bar{\omega}' = [\bar{\omega}\bar{\omega}_1] + [d\bar{y}_{2q+2}\bar{\omega}_2] + \dots + [d\bar{y}_p\bar{\omega}_{p-2q}] + [\bar{\omega}_{p-2q+1}\bar{\omega}_{p-2q+2}] + \dots,$$

formule mettant en évidence le fait que tout le parti possible a été tiré des intégrales données.

On a en outre obtenu les relations canoniques

$$\{\bar{y}_{2q+1}\} = 1,$$
$$(\bar{y}_1\bar{y}_2) = \dots = (\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q}) = 1,$$
$$(\bar{y}_1\bar{y}_{2q+1}) = -\bar{y}_1,\ (\bar{y}_3\bar{y}_{2q+1}) = -\bar{y}_3,\ \dots,\ (\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q+1}) = -\bar{y}_{2q-1},$$

toutes les autres quantités $\{\bar{y}_i\}$, $(\bar{y}_i\bar{y}_j)$ étant nulles.

3° *La forme* ω *est du second type et les formes* φ *et* Φ *sont réductibles à*

$$\varphi = \xi_1', \qquad \Phi = [\xi_1'\xi_2'] + \dots + [\xi'_{2q-1}\xi'_{2q}].$$

On a dans ce cas

$$\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \dots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] + [(\omega + \varpi_2)\omega_1] + [\varpi_{2q+1}\omega_2] + \dots + [\varpi_p\omega_{p-2q+1}] + \dots$$

Posons encore

$$\Pi = [\varpi_1\varpi_2] + \dots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}]$$

et dérivons extérieurement ω' en négligeant les termes en

$$\omega + \varpi_2, \qquad \varpi_{2q+1}, \dots, \varpi_p, \qquad \omega_{p-2q+2}, \dots$$

Nous obtenons

$$\Pi' + [\Pi\omega_1] + [\varpi_2'\omega_1] + [\varpi'_{2q+1}\omega_2] + \dots + [\varpi_p'\omega_{p-2q+1}] = 0.$$

Cette identité permet de poser

$$\varpi_{2q+1} = d\bar{y}_{2q+1}, \dots, \varpi_p = d\bar{y}_p\,;$$

on voit ensuite qu'en regardant $\bar{y}_{2q+1}, \dots, \bar{y}_p$ comme des constantes, ϖ_2' est égal à $-\Pi$ de rang $2q$, l'équation $\varpi_2 = 0$ faisant partie du système associé de ϖ_2'. On peut donc supposer

$$\varpi_2 = -(\bar{y}_1 d\bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q})$$

En posant enfin

$$\bar{\omega} = \omega + \varpi_2 = \omega - \bar{y}_1 d\bar{y}_2 - \dots - \bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q},$$

on obtient

$$\bar{\omega}' = [\bar{\omega}\bar{\omega}_1] + [d\bar{y}_{2q+1}\bar{\omega}_2] + \dots + [d\bar{y}_p \bar{\omega}_{p-2q+1}] + \dots$$

On voit que tout le parti possible a été tiré des intégrales connues et on arrive en outre aux relations canoniques

$$\{\bar{y}_1\} = -\bar{y}_1, \ \{\bar{y}_3\} = -\bar{y}_3, \ \dots, \ \{\bar{y}_{2q-1}\} = -\bar{y}_{2q-1},$$
$$(\bar{y}_1\bar{y}_2) = (\bar{y}_3\bar{y}_4) = \dots = (\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q}) = 1,$$

toutes les autres quantités $\{\bar{y}_i\}$, $(\bar{y}_i\bar{y}_j)$ étant nulles.

4° *La forme ω est du second type et les formes φ et Φ sont réductibles à*

$$\varphi = \xi'_{2q+1}, \qquad \Phi = [\xi_1'\xi_2'] + \dots + [\xi'_{2q-1}\xi'_{2q}].$$

On a dans ce cas

$$\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \dots + [\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}] + [\omega\varpi_{2q+1}] + [\varpi_{2q+2}\omega_1] + \dots + [\varpi_p\omega_{p-2q-1}] + \dots$$

En conservant la même signification que plus haut à la lettre Π, on a, en négligeant les termes en

$$\varpi_{2q+2}, \ \dots, \ \varpi_p, \ \omega_{p-2q}, \ \dots, \ \omega_{2n-1-p},$$

l'identité

$$\Pi' + [\Pi\varpi_{2q+1}] - [\omega\varpi'_{2q+1}] + [\varpi'_{2q+2}\omega_1] + \dots + [\varpi_p'\omega_{p-2q-1}] = 0.$$

Les dérivées extérieures $\varpi'_{2q+1}, \varpi'_{2q+2}, \dots, \varpi_p'$ sont nulles avec $\varpi_{2q+1}, \dots, \varpi_p$; on peut donc poser

$$\varpi_{2q+1} = \frac{d\bar{y}_{2q+1}}{\bar{y}_{2q+1}}, \ \varpi_{2q+2} = d\bar{y}_{2q+2}, \ \dots, \ \varpi_p = d\bar{y}_p.$$

La dérivée extérieure de la forme $\bar{y}_{2p+1}\Pi$ est alors nulle quand on regarde $\bar{y}_{2q+2}, \dots, \bar{y}_p$ comme des constantes. On peut donc poser

$$\bar{y}_{2q+1}\Pi = [d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \dots + [d\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}].$$

Finalement, en posant

$$\bar{\omega} = \bar{y}_{2q+1}\omega - \bar{y}_1 d\bar{y}_2 - \dots - \bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q},$$

on obtient

$$\bar{\omega}' = [d\bar{y}_{2q+2}\bar{\omega}_1] + \dots + [d\bar{y}_p\bar{\omega}_{p-2q-1}] + \dots$$

On voit avec évidence que tout le parti possible a été tiré des intégrales connues. On a en outre obtenu les relations canoniques

$$\{\bar{y}_{2q+1}\} = \bar{y}_{2q+1},$$
$$(\bar{y}_1\bar{y}_2) = (\bar{y}_3\bar{y}_4) = \dots = (\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q}) = \bar{y}_{2e+1},$$

toutes les autres quantités $\{y_i\}$, $(y_i y_j)$ étant nulles.

CHAPITRE XIV.

—

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI ADMETTENT UNE ÉQUATION DE PFAFF INVARIANTE.

I. — *Méthode générale d'intégration.*

136. Nous avons déjà rencontré (n° **104**) le système caractéristique d'une équation de Pfaff

(1) $$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_r dx_r = 0;$$

il est formé par les équations

(2) $$\omega = 0, \qquad \frac{\dfrac{\partial \omega'}{\partial (dx_1)}}{a_1} = \frac{\dfrac{\partial \omega'}{\partial (dx_2)}}{a_2} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial \omega'}{\partial (dx_r)}}{a_r},$$

dont les $r - 1$ dernières fournissent le système associé de la forme quadratique extérieure ω', quand on y suppose les variables liées par la relation $\omega = 0$.

Ce système caractéristique a également été rencontré au Chapitre précédent (n° **128**) à propos d'une expression de Pfaff ω du second type.

Le nombre des équations indépendantes du système caractéristique (2) est toujours impair ; on peut en effet, en tenant compte de la relation $\omega = 0$, mettre ω' sous la forme

$$\omega' = [\omega_1 \omega_2] + \ldots + [\omega_{2n-1} \omega_{2n}] \qquad (\text{mod. } \omega),$$

en désignant par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$ des formes différentielles linéaires indépendantes entre elles et indépendantes de ω. Le système caractéristique de l'équation (1) est alors défini par les équations

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n} = 0.$$

L'entier n est, comme on voit, le plus grand entier tel que la forme $[\omega \omega'^n]$ ne soit pas nulle. La classe de l'équation $\omega = 0$ est égale au degré de cette forme.

137. Il est facile de retrouver une forme canonique pour l'équation (1). Soit en effet y_1 une intégrale première quelconque du système caractéristique (2) ; si l'on égale y_1 à une constante arbitraire C_1 et dy_1 à zéro, le rang du système caractéristique de la nouvelle équation (1) est réduit au moins d'une unité, et, *comme ce rang est impair*, il se réduit au moins de deux unités. Soit y_2 une intégrale première du nouveau système caractéristique. En posant

$$y_1 = C_1,\ y_2 = C_2; \qquad dy_1 = 0,\ dy_2 = 0,$$

le rang du système caractéristique de l'équation donnée est réduit d'au moins quatre unités et ainsi de suite. Finalement au bout de $n + 1$ opérations au plus, l'équation $\omega = 0$ sera identiquement vérifiée ; autrement dit cette équation est de la forme

$$z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \dots + z_q dy_q + dy_{q+1} = 0 \qquad (q \leqslant n).$$

L'entier q est du reste égal à n, sinon l'équation (1) pourrait s'écrire au moyen de moins de $2n + 1$ variables.

Donc *si le système caractéristique de l'équation* (1) *est de rang* $2n + 1$, *cette équation est réductible à la forme*

$$dy_{n+1} + z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \dots + z_n dy_n = 0,$$

et les quantités

$$y_1, \dots, y_{n+1}; \qquad z_1, \dots, z_n$$

constituent un système d'intégrales premières indépendantes des équations caractéristiques.

On voit que par cette méthode *la réduction de l'équation* (1) *à sa forme canonique, et par suite l'intégration de son système caractéristique, exigent* $n + 1$ *opérations successives d'ordres*

$$2n + 1, \quad 2n - 1, \dots, 3, 1,$$

et des différentiations.

138. On peut remarquer, comme au Chapitre XII (n° **120**), que la connaissance de $N \geqslant n + 1$ intégrales premières

$$y_1, y_2, \dots, y_N$$

telles que l'équation (1) soit identiquement vérifiée en égalant ces intégrales à des constantes arbitraires, permet d'achever par des différentiations l'intégration des équations caractéristiques. L'équation (1) peut en effet se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$dy_N + z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \dots + z_{N-1} dy_{N-1} = 0,$$

et on démontre que les coefficients $z_1, \dots, z_{N-1}$ sont encore des intégrales premières des équations caractéristiques.

Plus généralement on peut se proposer de voir à quoi se réduit l'intégration du système caractéristique quand on connaît un certain nombre r d'intégrales premières indépendantes de ce système.

139. *Intégrales premières en involution.* — Nous dirons que deux intégrales premières f et g du système caractéristique de l'équation (1) sont *en involution* si l'on a

$$[\omega\omega'^{n-1}df dg] = 0; \tag{3}$$

cette définition est évidemment indépendante du choix des variables et aussi indépendante du facteur arbitraire par lequel on peut multiplier le premier membre de l'équation (1).

La propriété de deux intégrales premières d'être en involution entraîne la conséquence importante que le *rang du système caractéristique se réduit de quatre unités quand on suppose les variables liées par les deux relations*

$$f = C, \quad g = C',$$

où C *et* C′ *sont deux constantes arbitraires.* La condition (3) exprime en effet que, si on suppose $df = dg = 0$ ainsi que $\omega = 0$, le rang de ω' est inférieur à $2n - 2$ et par suite égal à $2n - 4$.

II. — *Utilisation d'intégrales connues.*

140. *Cas où on connaît p intégrales premières $y_1, \ldots, y_p$ indépendantes en involution deux à deux.* — Dans ce cas il résulte des développements du Chapitre VI (n° **67**) que le rang de ω', quand on y suppose les différentielles liées par les relations

$$\omega = 0, \quad dy_1 = 0, \ldots, dy_p = 0,$$

est réduit à $2n - 2p$. Le système caractéristique de l'équation (1), où on suppose les variables liées par les relations

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \ldots, y_p = C_p,$$

est donc de rang $2n - 2p + 1$, et son intégration exige des opérations d'ordres

$$2n - 2p + 1, \quad 2n - 2p - 1, \ldots, 3, 1$$

suivies de différentiations.

Le cas qui vient d'être examiné est celui où le rang du système caractéristique est réduit d'emblée du nombre maximum $2p$ d'unités.

141. *Cas où les intégrales premières données ne sont pas toutes en involution deux à deux.* — Ici la réduction du rang du système caractéristique, quand on y égale les intégrales premières données à des constantes arbitraires, n'atteint pas sa limite supérieure $2p$. En revanche *on peut déterminer un in-*

variant intégral absolu linéaire pour les équations caractéristiques, ce qui, dans certains cas, peut produire une réduction du problème de l'intégration bien plus grande que dans le premier cas, en apparence le plus favorable.

Supposons en effet que y_1 et y_2 soient deux intégrales premières non en involution des équations caractéristiques ; on aura

$$n[\omega\omega'^{n-1}dy_1dy_2] = A[\omega\omega'^n],$$

le coefficient A n'étant pas nul. Il existe une infinité de fonctions (inconnues) m telles que

$$\varpi = m\omega$$

soit une forme invariante, c'est-à-dire puisse s'exprimer au moyen des intégrales premières des équations caractéristiques et de leurs différentielles. On a pour une telle forme

$$\varpi' = m\omega' + [dm\omega]$$

et par suite

$$[\varpi\varpi'^{n-1}dy_1dy_2] = m^n[\omega\omega'^{n-1}dy_1dy_2],$$
$$[\varpi\varpi'^n] = m^{n+1}[\omega\omega'^n].$$

On a donc, par comparaison,

$$n[\varpi\varpi'^{n-1}dy_1dy_2] = \frac{A}{m}[\varpi\varpi'^n].$$

Les deux formes entre crochets sont évidemment invariantes ; par suite $\frac{A}{m}$ est une intégrale première ; donc

$$\frac{A}{m}\varpi = A\omega$$

est une forme invariante. C'est le résultat auquel nous voulions parvenir :

Si l'on connaît deux intégrales premières y_1, y_2 telles que la fonction A *définie par l'égalité*

$$n[\omega\omega'^{n-1}dy_1dy_2] = A[\omega\omega'^n]$$

ne soit pas nulle, la forme linéaire $A\omega$ *est une forme invariante absolue.*

Remarquons en outre que les variables en nombre minimum au moyen desquelles peut s'exprimer la forme $A\omega$ sont évidemment les $2n+1$ intégrales premières des équations caractéristiques données ; *le système caractéristique de la forme* $A\omega$ *est donc confondu avec celui de l'équation* (1) et par suite de rang impair. *La forme* $A\omega$ *est du premier type.*

142. On peut rattacher le théorème précédent à une méthode d'intégration susceptible d'une grande généralisation et consistant à intégrer les équations caractéristiques de la *forme* $u\omega$, où u est une variable *auxiliaire*. Il est évident en effet qu'à toute solution de ces équations correspondra une solution des équations caractéristiques de l'*équation* $\omega = 0$, à savoir celle qu'on obtiendra en éliminant la variable auxiliaire u entre les relations qui définissent la solution.

La forme $u\omega$ est évidemment du second type et la méthode générale d'intégration de ses équations caractéristiques exposée au n° **128** est identique à celle qui a été rappelée au n° **137** pour les équations caractéristiques de l'équation $\omega = 0$. Il n'y a donc, *si l'on ne sait rien a priori sur les intégrales*, aucun avantage à substituer la considération de la forme $u\omega$ à celle de l'équation $\omega = 0$. Mais l'avantage devient évident si l'on connaît *a priori* des intégrales premières des équations caractéristiques, car on peut appliquer à l'intégration des équations caractéristiques de la forme $u\omega$ la méthode d'utilisation exposée au n° **134**. En particulier, si l'on connaît deux intégrales premières y_1 et y_2 des équations caractéristiques de l'équation $\omega = 0$, on a

$$\left\{ y_1 \right\} = 0, \qquad \left\{ y_2 \right\} = 0,$$

et le calcul de la parenthèse $(y_1 y_2)$ définie (n° **132**) par

$$(n + 1)[(u\omega)'^n dy_1 dy_2] = (y_1 y_2)(u\omega)'^{n+1},$$

donne, en développant et égalant les termes qui contiennent du,

$$(y_1 y_2) = \frac{A}{u},$$

où A est la quantité définie au numéro précédent. On pourrait continuer l'application de la méthode générale en conservant la variable auxiliaire u, formant la quantité $\left\{ \frac{A}{u} \right\}$, les parenthèses de cette quantité avec y_1 et y_2, et ainsi de suite. On peut aussi remarquer que $\frac{A}{u}$ étant une intégrale première des équations caractéristiques de la forme $u\omega$, la forme $A\omega$ est elle-même invariante.

III. — *Application aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

143. Le problème de l'intégration des équations caractéristiques d'une équation de Pfaff trouve une application immédiate dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. En effet intégrer une équation

$$F\left(z, x_1, x_2, \dots, x_n; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

ou, en employant une notation classique,

$$F(z, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \tag{4}$$

c'est déterminer $(n + 1)$ fonctions $z, p_1, p_2, \dots, p_n$ de $x_1, x_2, \dots, x_n$ satisfaisant à l'équation (4) et à l'équation de Pfaff

$$\omega \equiv dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_n dx_n = 0. \tag{5}$$

Or si l'on imagine que l'un des $2n + 1$ arguments z, x_i, p_i a été tiré de l'équation (4) en fonction des $2n$ autres, l'équation de Pfaff (5) ne contient plus que $2n$ variables et son système caractéristique est nécessairement de rang *impair* $2n - 1$. Par suite, en tenant compte de l'équation (4), l'équation de Pfaff (5) est réductible à la forme canonique

$$(6) \qquad dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_{n-1} dX_{n-1} = 0,$$

où $Z, X_1, \dots, X_{n-1}, P_1, \dots, P_{n-1}$ sont $2n - 1$ fonctions indépendantes : ce sont les intégrales premières des équations caractéristiques de l'équation (5).

Cela posé supposons qu'on sache ramener l'équation (5) à la forme canonique (6). Comme l'intégration de l'équation (4) revient au fond à déterminer entre $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ un nombre de relations indépendantes égal à $n + 1$ (dont la relation donnée (4)) telles que l'équation (5) en résulte, il suffira, pour arriver à ce résultat, d'établir entre $Z, X_1, \dots, P_{n-1}$ un nombre de relations indépendantes égal à n et entraînant avec elles l'équation (6). Or cela est possible d'une manière générale en prenant

$$Z = f(X_1, \dots, X_{n-1}),$$
$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, P_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial X_{n-1}},$$

f désignant une fonction arbitraire de ses arguments. Plus généralement on établira entre $Z, X_1, \dots, X_{n-1}$ un nombre quelconque $h \leqslant n$ de relations indépendantes

$$\Phi_1(Z, X_1, \dots, X_{n-1}) = 0, \quad \Phi_2 = 0, \dots, \Phi_h = 0,$$

et on y joindra les relations obtenues en éliminant les paramètres homogènes $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ entre les $n - 1$ équations

$$\lambda_1\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} + P_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial Z}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X_1} + P_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial Z}\right) + \dots + \lambda_h\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial X_1} + P_1 \frac{\partial \Phi_h}{\partial Z}\right) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_1\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_{n-1}} + P_{n-1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial Z}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X_{n-1}} + P_{n-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial Z}\right) + \dots$$
$$+ \lambda_h\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial X_{n-1}} + P_{n-1} \frac{\partial \Phi_h}{\partial Z}\right) = 0.$$

144. Les équations

$$X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1},$$
$$P_1 = b_1, \dots, P_{n-1} = b_{n-1},$$
$$Z = c$$

définissent des multiplicités à une dimension, qui sont les multiplicités caractéristiques de l'équation de Pfaff (5) (où l'on suppose les variables liées par la relation (4)). *C'est ce qu'on appelle les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles* (4). On voit immédiatement que toute surface intégrale est engendrée par des caractéristiques.

Il est facile de former les équations différentielles des caractéristiques ; ce sont en effet les équations du système associé de ω', où l'on suppose les différentielles des variables liées par la relation $\omega = 0$, et *aussi par la relation* $dF = 0$. On les obtient donc (n° **104**) en adjoignant à l'équation (5) les équations

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dz)} & \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dx_1)} & \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dx_2)} & \cdots & \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dp_1)} & \cdots & \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dp_n)} \\ 1 & -p_1 & -p_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial p_n} \end{matrix} \right\| = 0,$$

qui peuvent s'écrire

$$(7) \qquad \frac{dx_1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\dfrac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

On retrouve les équations classiques.

IV. — *La méthode de Cauchy.*

145. La méthode qui vient d'être exposée revient au fond à l'intégration des équations caractéristiques et à la réduction de l'équation (5) à sa forme canonique (6), cette réduction résultant du reste de l'intégration, si celle-ci est dirigée d'une manière convenable (n° **137**). Il est facile de voir que, quel que soit le procédé employé pour intégrer les équations caractéristiques, la réduction de l'équation (5) à sa forme normale est toujours possible, une fois l'intégration des équations caractéristiques effectuée. Il suffit en effet de déterminer les intégrales premières qui, pour une valeur numérique donnée x_n^0 de x_n, se réduisent respectivement à

$$z, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n.$$

Si on désigne par

$$Z, X_1, \ldots, X_{n-1}, P_1, \ldots, P_n$$

ces intégrales premières, nécessairement liées par la relation

$$F(Z, X_1, \ldots, X_{n-1}, x_n^0; P_1, \ldots, P_n) = 0,$$

la relation (5), qui peut, comme on le sait, s'exprimer au moyen des intégrales premières, se réduira manifestement à

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_{n-1}\, dX_{n-1} = 0.$$

C'est là le principe de la *méthode de Cauchy*.

V. — *La méthode de Lagrange.*

146. La méthode de l'*intégrale complète* de Lagrange se rattache facilement aussi au point de vue précédent. L'équation

$$V(z, x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n) = 0 \tag{8}$$

définit une intégrale complète si elle définit une fonction de z satisfaisant à l'équation (4) quelles que soient les *n constantes* arbitraires $a_1, \ldots, a_n$. L'équation (4) est du reste la seule à laquelle satisfassent toutes les fonctions z définies par (8) ; car l'élimination de $a_1, \ldots, a_n$ entre l'équation (8) et les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array}\right. \tag{9}$$

qui s'en déduisent ne conduit en général (et c'est ce que nous supposons) qu'à une seule relation qui est naturellement l'équation (4).

L'équation (4) étant le résultat de l'élimination de $a_1, \ldots, a_n$ entre les $(n+1)$ équations (8) et (9), intégrer l'équation (4) revient à satisfaire à l'équation de Pfaff (5), supposée à $3n+1$ variables z, x_i, p_i, a_i liées par les $(n+1)$ relations (8) et (9). Or en tenant compte de ces relations, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots \\ &= \frac{\partial V}{\partial z} (dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n) + \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n. \end{aligned}$$

L'équation de Pfaff (5) est donc équivalente à l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0;$$

mais cette dernière est réduite d'elle-même à sa forme normale en posant

$$X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}, Z = a_n,$$

$$P_1 = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}, \ldots, P_{n-1} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_{n-1}}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}.$$

On voit que les caractéristiques sont définies par les équations

$$V = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} + b_1 \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_{n-1}} + b_{n-1} \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0;$$

c'est un résultat classique.

147. Appliquons le théorème du n° **141** au cas particulier d'une équation à deux variables indépendantes

(10) $$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

La connaissance de deux intégrales premières indépendantes u et v des équations caractéristiques conduit, quand elles ne sont pas en involution, à la détermination d'un invariant intégral linéaire pour les équations caractéristiques. Cet invariant intégral est $A\omega$, où A est défini par l'égalité

$$[\omega du dv] = A[\omega\omega'],$$

ou plutôt, comme on suppose ici les variables liées par la relation (10),

$$[dF\omega du dv] = A[dF\omega\omega'].$$

Prenons en particulier dans les deux membres les termes en $[dxdzdpdq]$, nous trouvons

$$A = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial q}} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix}.$$

Si donc le déterminant du second membre n'est pas nul, l'expression $A(dz - pdx - qdy)$ *est une forme invariante pour les équations des caractéristiques.*

VI. — *Equations aux dérivées partielles du premier ordre admettant une transformation infinitésimale.*

148. Si l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

(4) $$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

admet une transformation infinitésimale Af portant sur les variables $z, x_1, \ldots, p_n$, cela signifie que tout système de $n + 1$ relations entre ces $2n + 1$ variables qui définit une multiplicité intégrale est changé par la transformation en un autre système de $n + 1$ relations définissant encore une multiplicité intégrale. Par suite, en tenant compte de l'équation (4), l'équation de Pfaff

(5) $$\omega \equiv dz - p_1dx_1 - \ldots - p_ndx_n = 0$$

admet la transformation infinitésimale Af. Il en résulte immédiatement (n° **97**) que la forme linéaire

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(A)} = \frac{\delta z - p_1\delta x_1 - p_2\delta x_2 - \ldots - p_n\delta x_n}{A(z) - p_1A(x_1) - p_2A(x_2) - \ldots - p_nA(x_n)}$$

est invariante pour le système d'équations différentielles des caractéristiques.

La connaissance d'une transformation infinitésimale entraîne donc la connaissance d'un invariant intégral linéaire pour les équations des caractéristiques et par suite l'intégration de l'équation donnée, qui était un problème du second type exigeant des opérations d'ordres

$$2n+1, \quad 2n-1, \ldots, 3, 1,$$

est ramenée à un problème du premier type exigeant des opérations d'ordres

$$2n, \quad 2n-2, \ldots, 2, 0.$$

149. Un exemple classique est celui où l'équation donnée (1) ne dépend pas explicitement de z : il est évident alors que de toute solution de l'équation on en déduit une autre en ajoutant à z une constante arbitraire ; autrement dit l'équation donnée admet la transformation infinitésimale

$$Af = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

L'invariant intégral absolu qu'admettent les équations des caractéristiques est alors

$$\int \omega_\delta = \int \delta z - p_1 \delta x_1 - \ldots - p_n \delta x_n.$$

La méthode d'intégration des équations de cette nature résulte de la théorie du Chapitre XII. Les équations caractéristiques de ω' sont ici

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}};$$

une fois déterminées $n-1$ intégrales premières en involution deux à deux, l'intégration des équations caractéristiques de ω se ramène à une quadrature, l'expression ω devenant une différentielle exacte quand on égale les $n-1$ intégrales premières à des constantes arbitraires.

VII. — *La première méthode de Jacobi.*

150. La première méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre se rattache aux considérations précédentes. Jacobi ramène l'équation (4), supposée quelconque, à une équation où ne figure plus la fonction inconnue, à savoir

$$F\left(z, x_1, \ldots, x_n, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}}\right) = 0.$$

En posant pour abréger

$$\frac{\partial V}{\partial z} = u,$$

les équations caractéristiques à intégrer sont celles de la forme invariante absolue

$$\delta V - u(\delta z - p_1 \delta x_1 - \ldots - p_n \delta x_n),$$

dont les $2n + 3$ variables sont liées par la relation (4) ; elles admettent l'invariant intégral *relatif*

$$(11) \qquad \int u(\delta z - p_1 \delta x_1 - \ldots - p_n \delta x_n),$$

et ce sont d'abord les équations caractéristiques de cet invariant intégral qu'on intègre d'après les méthodes du Chapitre XII.

La méthode de Jacobi est à rapprocher de celle qui a été indiquée au n° **142**, avec cette différence que cette dernière utilise l'intégrale (11) comme invariant intégral *absolu*, la méthode de Jacobi l'utilisant comme invariant intégral *relatif*. Du reste la méthode de Jacobi conduit à des opérations d'ordres

$$2n + 2, \quad 2n, \ldots, 2, 0,$$

au lieu de

$$2n + 1, \quad 2n - 1, \ldots, 1.$$

Son avantage est qu'elle permet d'utiliser la connaissance d'intégrales premières données en appliquant le théorème de Poisson-Jacobi. Mais cet avantage est conservé par la méthode du n° **142** qui tire tout le parti possible d'intégrales premières données.

VIII. — *Réduction de certaines équations différentielles à une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

151. On peut maintenant se placer à un point de vue inverse de celui des numéros précédents.

Considérons d'abord une équation de Pfaff à un nombre pair $2s$ de variables, mais supposons que $s + 1$ seulement des coefficients soient différents de zéro :

$$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_{s+1} dx_{s+1} = 0.$$

Les équations caractéristiques de cette équation de Pfaff sont évidemment les mêmes que celles de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à s variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_s$ obtenue en posant

$$x_{s+1} = z, \quad a_1 + p_1 a_{s+1} = 0, \ldots, a_s + p_s a_{s+1} = 0,$$

et en éliminant $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{2s}$ entre ces $s + 1$ équations. Il faut supposer bien entendu que l'élimination est possible et donne une seule relation.

152. Considérons en second lieu un système d'équations différentielles admettant un invariant intégral linéaire relatif $\int \omega$, la forme ω étant à $2s + 1$

variables, et $[\omega'^s]$ étant différent de zéro. Les équations différentielles considérées sont les équations caractéristiques de ω'. Leur intégration peut être ramenée à celle d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre ne contenant pas explicitement la fonction inconnue si les coefficients de s des différentielles sont nuls dans ω :

$$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_{s+1} dx_{s+1}.$$

Considérons en effet l'équation de Pfaff

$$dV - \omega \equiv dV - a_1 dx_1 - a_2 dx_2 - \ldots - a_{s+1} dx_{s+1} = 0,$$

et posons

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2, \ldots, p_{s+1} = a_{s+1};$$

l'élimination de $x_{s+2}, \ldots, x_{2s+1}$ entre ces $s+1$ équations conduit à une relation

$$(12) \qquad F(x_1, \ldots, x_{s+1}; \quad p_1, \ldots, p_{s+1}) = 0,$$

qui n'est autre que l'équation aux dérivées partielles annoncée. Les équations différentielles des caractéristiques de cette équation sont formées des équations des caractéristiques de ω', auxquelles on adjoint l'équation

$$dV - \omega = 0.$$

On se rend compte facilement que la méthode d'intégration, indiquée au Chapitre XII, des équations caractéristiques de ω' conduit aux mêmes opérations que la recherche des caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (12).

Si l'invariant $\int \omega$ est celui des équations de la Dynamique :

$$\omega = p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n - H \delta t,$$

l'équation (12) n'est autre que celle de Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0.$$

153. La méthode de Jacobi pour l'intégration des équations de la Dynamique repose donc au fond sur l'identité de deux problèmes d'intégration, celui du système caractéristique d'un invariant intégral linéaire relatif $\int \omega$, et celui des équations caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre admettant une transformation infinitésimale (*par exemple* ne contenant pas explicitement la fonction inconnue). La nature du problème est déterminée dans les deux cas par l'existence d'un invariant intégral $\int \omega$.

Cette méthode de réduction à une équation aux dérivées partielles ne réussit que si la forme ω à $2s+1$ variables admet s coefficients nuls, mais il ne faudrait pas croire pour cela que, dans le cas où cette particularité ne se

présente pas, l'intégration des équations caractéristiques de ω' soit un problème plus compliqué que la recherche des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre ne contenant pas explicitement la fonction inconnue, ou, ce qui revient au même, l'intégration d'un système d'équations différentielles *canoniques*. Au fond *l'importance des équations canoniques tient uniquement à leur propriété d'admettre un invariant intégral* $\int \omega$ *et non pas à leur forme simple* : c'est l'existence de l'invariant intégral qui est la propriété fondamentale d'où toutes les autres dérivent.

IX. — *Remarques sur la nature des principales applications pratiques de la méthode de Jacobi.*

154. — En fait la plupart des applications fécondes qu'a eues en Dynamique la méthode de Jacobi ont leur origine dans des simplifications que présente la recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi, obtenue comme somme de fonctions dans chacune desquelles ne figure qu'une partie des variables $q_1, \ldots, q_n$ autres que t. Mais ces simplifications peuvent être mises en évidence indépendamment de tout recours à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et de l'intégrale complète.

Soit en effet ω une forme différentielle linéaire à $2s+1$ variables que nous désignerons par

$$x_1, \ldots, x_{2s}, t.$$

Supposons que ω puisse se décomposer en une somme de p termes

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_p,$$

la forme ω_i étant construite avec un certain nombre $2h_i$ des variables x et la variable t, de manière que les variables x qui entrent dans la formation de deux quelconques des formes $\omega_1, \ldots, \omega_p$ soient différentes. On aura par suite

$$s = h_1 + h_2 + \ldots + h_p.$$

Si l'on suppose la forme quadratique extérieure ω' de rang $2s$, il est nécessaire que les formes $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_p'$ soient respectivement de rang $2h_1, 2h_2, \ldots, 2h_p$. La réduction de chacune de ces p formes à sa forme canonique entraîne alors la même réduction pour ω'. Par suite *l'intégration des équations caractéristiques de* ω' *revient aux intégrations des équations caractéristiques de* $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_p'$, et les p problèmes correspondants peuvent être résolus indépendamment les uns des autres.

Une simplification encore plus grande se produit si les nombres k_i des variables x (différentes pour les différentes formes ω_i) qui entrent en même temps que t dans la constitution de ces formes, n'étaient pas tous pairs. Dans ce cas-là, la variable t serait une intégrale première des équations caractéris-

tiques de ω' : en donnant en effet à t une valeur constante arbitraire, le rang de la forme quadratique ω_i' serait réduit

$$\text{pour } k_i \text{ pair} \quad \text{à} \quad k_i \quad \text{au plus,}$$
$$\text{pour } k_i \text{ impair à } k_i - 1 \text{ au plus;}$$

or $2s$ est égal à la somme de tous les k_i; le rang de ω' serait donc, pour t constant, inférieur à $2s$, ce qu'il fallait démontrer. On voit de plus qu'il ne peut y avoir que *deux* des nombres k_i qui soient impairs et la réduction de ω' à sa forme normale, quand on y fait t constant, est fournie par les réductions à leurs formes normales de ω_1', ..., ω_p', quand on y fait également t constant.

CHAPITRE XV.

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI ADMETTENT PLUSIEURS INVARIANTS INTÉGRAUX LINÉAIRES.

I. — *Cas où on connaît autant d'invariants intégraux qu'il y a de fonctions inconnues.*

155. Nous n'aborderons pas dans ces Leçons le problème général de l'intégration d'équations différentielles admettant un nombre quelconque d'invariants intégraux. Bornons-nous au cas particulièrement simple où un système de n équations différentielles ordinaires du premier ordre à n fonctions inconnues admet n formes linéaires invariantes (indépendantes)

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$$

c'est-à-dire n invariants intégraux absolus linéaires

$$\int \omega_1, \quad \int \omega_2, \ldots, \int \omega_n.$$

Dans ce cas particulier les équations différentielles données peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0.$$

Les formes quadratiques extérieures ω_1', ω_2', ..., ω_n' étant invariantes, peuvent s'exprimer au moyen de ω_1, ..., ω_n par des formules telles que

$$(2) \qquad \omega_s' = \sum_{(ik)}^{1,\ldots,n} c_{iks}[\omega_i\omega_k] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Les coefficients c_{iks} sont manifestement des intégrales premières des équations différentielles données. Nous allons voir qu'on peut toujours se ramener au cas où ce sont des constantes.

Supposons en effet que parmi les intégrales c_{iks} il y en ait un certain nombre r indépendantes, que nous désignerons par

$$y_1, y_2, \ldots, y_r;$$

les c_{iks} sont donc des fonctions déterminées de ces r intégrales. Chaque différentielle dy_i est à son tour une forme invariante qui peut s'exprimer linéairement au moyen de $\omega_1, \ldots, \omega_n$:

$$dy_i = b_{i1}\omega_1 + b_{i2}\omega_2 + \ldots + b_{in}\omega_n \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Les coefficients b_{ik} sont à leur tour des intégrales premières ; si parmi celles-ci, il y en a r' indépendantes entre elles et indépendantes des y_i, leurs différentielles $dy_{r+1}, \ldots, dy_{r+r'}$ pourront aussi s'exprimer linéairement en fonction des ω_i et les coefficients pourront fournir de nouvelles intégrales premières, et ainsi de suite. Il arrivera un moment où ces opérations auront une fin et on arrivera à un certain nombre $\rho \leqslant n$ d'intégrales premières $y_1, \ldots, y_\rho$ telles que les coefficients c_{iks} des formules (2) et les coefficients b_{ik} des formules

(3) $$dy_i = b_{i1}\omega_1 + \ldots + b_{in}\omega_n \quad (i = 1, 2, \ldots, \rho)$$

soient des fonctions déterminées de $y_1, y_2, \ldots, y_\rho$.

Cela posé, supposons, pour fixer les idées, que le déterminant obtenu en prenant les ρ premières colonnes du tableau des b_{ik} ne soit pas nul. On pourra alors substituer aux ρ formes invariantes $\omega_1, \ldots, \omega_\rho$ les formes invariantes $dy_1, \ldots, dy_\rho$. Si on attribue aux $y_1, \ldots, y_\rho$ des valeurs constantes arbitraires, le système d'équations à intégrer admettra $n - \rho$ formes invariantes $\omega_{\rho+1}, \ldots, \omega_n$ et on aura

$$\omega_s' = \sum_{(ik)}^{\rho+1, \ldots, n} c_{iks}[\omega_i\omega_k] \quad (s = \rho + 1, \ldots, n),$$

les coefficients c_{iks} étant maintenant des constantes.

156. Prenons donc le cas où dans les formules (2) les coefficients c_{iks} sont tous constants. Il est d'abord facile de voir que réciproquement l'existence de relations telles que (2) entraîne comme conséquence la propriété des formes $\omega_1, \ldots, \omega_n$ d'être invariantes vis-à-vis des équations différentielles (1) : le système caractéristique de l'ensemble des formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ s'obtient en effet (n° **78**) en ajoutant aux équations (1) les équations des systèmes associés de $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_n'$, équations qui sont toutes des conséquences des équations (1).

Si l'on substitue aux formes $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des combinaisons linéaires *à coefficients constants*

(4) $$\begin{cases} \overline{\omega}_1 = a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + \ldots + a_{1n}\omega_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overline{\omega}_n = a_{n1}\omega_1 + a_{n2}\omega_2 + \ldots + a_{nn}\omega_n, \end{cases}$$

ces n nouvelles formes sont encore invariantes et on a encore des relations

$$\overline{\omega}_s' = \sum_{(ik)}^{1, \ldots, n} \overline{c}_{iks}[\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k]$$

avec de nouvelles *constantes* $\bar{c}_{iks}$. Nous dirons que le tableau des $\bar{c}_{iks}$ a la même *structure* que le tableau des c_{iks}.

Il se peut qu'on puisse choisir les coefficients constants a_{ij} de la substitution (4) de manière que dans l'expression des $\nu < n$ premières dérivées $\bar{\omega}'_1, \ldots, \bar{\omega}'_\nu$ ne figurent que $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_\nu$, c'est-à-dire de manière que l'on ait

$$\bar{c}_{\nu+i,k,s} = \bar{c}_{k,\nu+i,s} = \bar{c}_{\nu+i,\nu+j,s} = 0 \quad (k, s = 1, 2, \ldots, \nu;\ i, j = 1, \ldots, n-\nu).$$

Dans ce cas les formes $\varpi_1, \ldots, \varpi_\nu$ sont invariantes pour le système *complètement intégrable* d'équations de Pfaff

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_\nu = 0.$$

Si on sait intégrer ce système et si on égale à des constantes arbitraires ses intégrales premières, le système donné se ramène à un système analogue au premier, sauf que n est remplacé par $n - \nu$.

Nous dirons que le tableau des c_{iks} est *simple* s'il est impossible de trouver une substitution linéaire à coefficients constants (4) effectuant la réduction précédente. Nous voyons alors que *le système d'équations différentielles donné peut se ramener à des systèmes successifs pour chacun desquels le tableau des c_{iks} est simple.* A chaque tableau simple correspond un problème particulier d'intégration.

157. — Laissant de côté pour le moment cette méthode de réduction, imaginons un second système d'équations différentielles

$$(1') \qquad \varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_n = 0$$

admettant les n formes invariantes ϖ_i avec les relations

$$(2') \qquad \varpi'_s = \sum_{(ik)}^{1,\ldots,n} c_{iks}[\varpi_i \varpi_k],$$

où les coefficients c_{iks} ont les mêmes valeurs numériques que dans les formules (2). Soient respectivement

$$y_1, \quad y_2, \ldots, y_n,$$
$$z_1, \quad z_2, \ldots, z_n$$

deux systèmes d'intégrales premières indépendantes, le premier pour les équations (1), le second pour les équations (1'). Alors $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ peuvent s'exprimer au moyen des y_i et de leurs différentielles, de même que $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ peuvent s'exprimer au moyen des z_i et de leurs différentielles. *Il est possible de choisir les intégrales premières z_i de façon que les ϖ_i s'expriment au moyen des z_i et des dz_i de la même manière que les ω_i au moyen des y_i et des dy_i.* Cela revient à dire que si cette condition n'est pas réalisée, on peut du moins trouver des fonctions

$$f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n)$$

telles qu'en posant

$$z_1 = f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, z_n = f_n(y_1, \ldots, y_n)$$

les ϖ_i deviennent respectivement égaux aux ω_i. Il suffit pour cela d'intégrer les équations aux différentielles totales

$$(5)\qquad \begin{cases} \varpi_1 - \omega_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varpi_n - \omega_n = 0, \end{cases}$$

où les z_i sont des fonctions inconnues des variables indépendantes y_i. Ce système de Pfaff (5) est *complètement intégrable* (n° **101**), car, si l'on tient compte des équations (5), les dérivées extérieures

$$\varpi_s' - \omega_s' = \sum c_{iks}[\varpi_i \varpi_k] - \sum c_{iks}[\omega_i \omega_k]$$

de leurs premiers membres s'annulent toutes. Il est donc possible, et cela d'une infinité de manières (dépendant de n constantes arbitraires), de satisfaire aux conditions énoncées.

Cela prouve en particulier que les intégrations des deux systèmes (1) et (1′) sont deux problèmes *essentiellement* de même nature, en ce sens que toute méthode *n'utilisant pour l'intégration que les propriétés données de* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *d'être des formes invariantes*, pourra être appliquée parallèlement aux systèmes (1) et (1′), tout progrès dans l'intégration de (1) ayant son équivalent dans l'intégration de (1′).

II. — *Le groupe qui conserve les invariants donnés.*

158. Revenons au système (1) et imaginons fait un choix de n intégrsles premières indépendantes

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Il est possible de trouver une infinité d'autres systèmes de n intégrales premières

$$\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n}$$

telles que les formes ω_s s'expriment au moyen des $\overline{y_i}$ et de leurs différentielles de la même manière qu'au moyen des y_i et de leurs différentielles. Il suffit pour cela d'intégrer le système de Pfaff

$$(6)\qquad \begin{cases} \overline{\omega_1} - \omega_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{\omega_n} - \omega_n = 0, \end{cases}$$

où $\overline{\omega_s}$ désigne la même fonction des $\overline{y_i}$ et $d\overline{y_i}$ que ω_s l'est des y_i et dy_i. Dans ce système de Pfaff regardons les arguments $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}$ comme des fonctions inconnues des variables indépendantes $y_1, \ldots, y_n$. Un tel système est complètement intégrable pour la même raison qui a été indiquée relativement au système (5). Il existe donc des fonctions

$$(7)\qquad \overline{y_s} = f_s(y_1, \ldots, y_n; \quad C_1, \ldots, C_n) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

dépendant de n *constantes arbitraires* et satisfaisant aux conditions énoncées plus haut.

Les équations (7) définissent une infinité de transformations effectuées sur les intégrales premières $y_1, \ldots, y_n$ et *conservant les données du problème*, c'est-à-dire laissant invariantes les formes $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Ces transformations forment un groupe G, car étant caractérisées par la propriété de conserver $\omega_1, \ldots, \omega_n$, il est bien évident qu'en effectuant l'une à la suite de l'autre deux transformations de la forme (7), on obtient encore une transformation résultante de la même forme. Ce groupe G est un groupe fini à n paramètres : *c'est le plus grand groupe qui, appliqué aux intégrales premières du système donné, conserve les formes invariantes données.* Comme on le conçoit facilement, le parti qu'on peut tirer de la connaissance de ces n formes invariantes dépend de la nature de ce groupe. C'est du reste là un fait général s'appliquant à tous les cas où on connaît *a priori* des invariants intégraux, des systèmes d'équations invariantes, des transformations infinitésimales, etc. La nature du plus grand groupe de transformations qui, appliquées aux intégrales premières des équations différentielles données (ou, ce qui revient au même, à leurs courbes intégrales regardées comme des êtres indivisibles), conserve les renseignements connus, à une importance prépondérante dans l'intégration du système.

Dans le cas qui nous occupe, on voit en particulier qu'il est impossible, en se basant uniquement sur le fait que $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont des formes invariantes, d'obtenir aucune intégrale première sans intégration [1] ; sinon en effet la propriété des formes $\omega_1, \ldots, \omega_n$ d'être invariantes permettrait par elle-même d'*individualiser* une intégrale première, y_1 par exemple, qui devrait par suite être égale à l'une quelconque des intégrales $\overline{y_1}$ définies par les formules (7) ; or cela est manifestement impossible, car les équations (6) admettent toujours une solution telle qu'à des valeurs numériques données de $y_1, \ldots, y_n$, correspondent des valeurs numériques *arbitraires* de $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}$.

159. Les constantes c_{iks} jouent un rôle important relativement au groupe G : ce sont ce que, dans la théorie des groupes, on appelle les *constantes de structure* de ce groupe. La méthode de réduction indiquée plus haut (n° **156**) repose précisément sur la décomposition de G en une série normale de sous-groupes. Le cas où le tableau des c_{iks} est *simple* correspond aux groupes *simples*.

On sait que les constantes de structure d'un groupe ne sont pas arbitraires ; on peut le vérifier ici en exprimant que les dérivées extérieures de $\omega_1', \ldots, \omega_n'$ sont nulles. La dérivée extérieure de ω_s', en utilisant les expressions (2) de $\omega_1', \ldots, \omega_n'$, est (n° **73**)

$$\sum_{(ik)}^{1, \ldots, n} c_{iks}\left([\omega_i'\omega_k] - [\omega_i\omega_k']\right)$$

$$= \sum_{(\alpha\beta\gamma)}^{1, \ldots, n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} c_{\alpha\beta i}\, c_{i\gamma s} + c_{\beta\gamma i}\, c_{i\alpha s} + c_{\gamma\alpha i}\, c_{i\beta s}\right)[\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma].$$

[1] Cela veut dire par une suite quelconque d'opérations *univoques* appliquées à $\omega_1, \ldots, \omega_n$ et susceptibles d'être effectuées quelle que soit la nature des coefficients de ces formes.

On a donc les relations nécessaires

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_{\alpha\beta i}\, c_{i\gamma s} + c_{\beta\gamma i}\, c_{i\alpha s} + c_{\gamma\alpha i}\, c_{i\beta s} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma, s = 1, 2, \ldots, n).$$

On démontre dans la théorie des groupes qu'elles sont suffisantes pour qu'il existe un groupe admettant les c_{iks} pour constantes de structure.

III. — *Exemples*.

160. Supposons toutes les constantes c_{iks} nulles. Il est évident alors que les formes $\omega_1, \ldots, \omega_n$ étant des différentielles exactes, l'intégration n'exige que n quadratures indépendantes. Les formes $\omega_1, \ldots, \omega_n$ étant réductibles à

$$\omega_1 = dy_1, \quad \omega_2 = dy_2, \ldots, \omega_n = dy_n,$$

le groupe G a pour équations

$$y_s' = y_s + C_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Le cas précédent se présente toujours si $n = 1$.

Cherchons quels sont tous les cas possibles pour $n = 2$. En dehors du cas qui vient d'être examiné, on pourrait avoir

$$\omega_1' = a[\omega_1\omega_2],$$
$$\omega_2' = b[\omega_1\omega_2],$$

les coefficients a et b n'étant pas nuls tous les deux. Supposons par exemple $b \neq 0$. En prenant $a\omega_2 - b\omega_1$ comme nouvelle forme $\overline{\omega_1}$, on voit immédiatement qu'on a

$$\overline{\omega_1}' = 0,$$
$$\omega_2' = [\overline{\omega_1}\omega_2].$$

Une première quadrature donne

$$\overline{\omega_1} = dy_1;$$

en égalant ensuite y_1 à une constante arbitraire, ω_2 devient une différentielle exacte et une deuxième quadrature achève l'intégration. En changeant un peu les notations, on peut supposer

$$\omega_1 = \frac{dy_1}{y_1},$$
$$\omega_2 = \frac{dy_2}{y_1}.$$

Le groupe G a pour équations

$$y_1' = C_1 y_1,$$
$$y_2' = C_1 y_2 + C_2.$$

161. Nous ne ferons pas la discussion générale pour $n = 3$. Signalons seulement le cas le plus intéressant où l'on peut réduire les formules (2) à

$$\omega_1' = [\omega_1\omega_2],$$
$$\omega_2' = [\omega_1\omega_3],$$
$$\omega_3' = [\omega_2\omega_3].$$

Dans ce cas *l'intégration des équations* (1) *revient à celle d'une équation de Riccati.*

Considérons en effet l'équation de Pfaff

$$dt + \omega_1 + t\omega_2 + \frac{1}{2}t^2\omega_3 = 0, \tag{8}$$

où t est regardée comme une fonction inconnue des variables, dépendantes et indépendantes, qui figurent dans les équations différentielles données. *Cette équation est complètement intégrable :* on vérifie en effet sans difficulté que la dérivée extérieure de son premier membre est nulle si on tient compte de l'équation elle-même (et si on utilise les expressions de ω_1', ω_2', ω_3'). Par suite, comme on sait, on peut ramener son intégration à celle d'une équation différentielle ordinaire, qui est évidemment une équation de Riccati. Or si l'on désigne par y_1, y_2, y_3 un système d'intégrales premières indépendantes des équations données (1), les expressions ω_1, ω_2, ω_3 peuvent s'exprimer au moyen des trois quantités y_1, y_2, y_3 et de leurs différentielles : la solution générale t de l'équation (1) est donc une fonction de y_1, y_2, y_3 (et d'une constante arbitraire C). Par suite si l'on a intégré l'équation de Riccati (8) sous la forme classique

$$t = \frac{\alpha + C\beta}{\gamma + C\delta},$$

les rapports mutuels des quatre fonctions α, β, γ, δ fournissent trois intégrales premières des équations données, et on démontre facilement qu'elles sont indépendantes.

V. — *Généralisations.*

162. Nous n'insisterons pas davantage sur cette théorie qui, pour être développée convenablement, exigerait des connaissances assez étendues sur la théorie des groupes. On voit comment cette dernière s'introduit nécessairement si on veut pousser jusqu'au bout les méthodes d'intégration d'équations différentielles qui admettent des invariants intégraux donnés. Signalons seulement que la méthode indiquée au n° **142** peut être généralisée à un système quelconque d'équations différentielles admettant des formes invariantes, des équations de Pfaff invariantes, etc. Elle consiste, *par l'introduction de variables auxiliaires*, à former autant d'invariants intégraux linéaires que le système d'équations données comporte d'intégrales premières indépendantes. Un exemple suffira pour faire comprendre l'esprit de la méthode.

Supposons qu'on ait à intégrer un système d'équations différentielles (S) à 4 variables

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

et que chacune des équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ soit invariante pour le système donné. On introduira trois variables auxiliaires nouvelles u_1, u_2, u_3 et on considérera les trois formes

$$\overline{\omega}_1 = u_1\omega_1, \qquad \overline{\omega}_2 = u_2\omega_2, \qquad \overline{\omega}_3 = u_3\omega_3.$$

L'intégration des équations caractéristiques (Σ) de ces trois formes entraînera celle des équations différentielles données par l'élimination de u_1, u_2, u_3 entre les relations qui définissent une solution quelconque de (Σ). Formons alors les dérivées extérieures $\overline{\omega}_1'$, $\overline{\omega}_2'$, $\overline{\omega}_3'$; en supposant qu'on ait

$$\begin{aligned} \omega_1' &\equiv a_1[\omega_2\omega_3] \qquad (\text{mod } \omega_1), \\ \omega_2' &\equiv a_2[\omega_3\omega_1] \qquad (\text{mod } \omega_2), \\ \omega_3' &\equiv a_3[\omega_1\omega_2] \qquad (\text{mod } \omega_3), \end{aligned}$$

avec des coefficients a_1, a_2, a_3 fonctions des variables primitives, on aura

$$\overline{\omega}_1' \equiv \frac{a_1 u_1}{u_2 u_3}\left[\overline{\omega}_2\overline{\omega}_3\right] \qquad (\text{mod } \overline{\omega}_1),$$

$$\overline{\omega}_2' \equiv \frac{a_2 u_2}{u_3 u_1}\left[\overline{\omega}_3\overline{\omega}_1\right] \qquad (\text{mod } \overline{\omega}_2),$$

$$\overline{\omega}'_3 \equiv \frac{a_3 u_3}{u_1 u_2}\left[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\right] \qquad (\text{mod } \overline{\omega}_3).$$

Les coefficients

$$\overline{a}_1 = \frac{a_1 u_1}{u_2 u_3}, \quad \overline{a}_2 = \frac{a_2 u_2}{u_3 u_1}, \quad \overline{a}_3 = \frac{a_3 u_3}{u_1 u_2}$$

sont donc des intégrales premières du système (Σ) caractéristique des *formes* $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$. Par suite il en est de même de

$$\sqrt{\overline{a}_2\overline{a}_3} = \frac{\sqrt{a_2 a_3}}{u_1},$$

et la forme

$$\sqrt{\overline{a}_2\overline{a}_3}\;\overline{\omega}_1 = \sqrt{a_2 a_3}\;\omega_1$$

est encore une forme invariante. Mais elle ne contient pas les variables auxiliaires u_1, u_2, u_3 ; c'est donc une forme invariante pour les équations données (S), et il est de même de $\sqrt{a_3 a_1}\;\omega_2$, $\sqrt{a_1 a_2}\;\omega_3$. Par suite *si aucun des coefficients* a_1, a_2, a_3 *n'est nul, le système différentiel donné admet trois formes linéaires invariantes* et on est ramené au problème traité dans ce Chapitre.

Il n'en sera naturellement pas toujours ainsi, mais *dans tous les cas on aura le moyen de tirer tout le parti possible des renseignements connus sur les équations données.*

CHAPITRE XVI.

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI ADMETTENT DES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES DONNÉES.

I. — *Réduction du problème.*

163. Nous avons déjà considéré des équations différentielles admettant des transformations infinitésimales, mais ces équations étaient supposées admettre un invariant intégral ou une équation de Pfaff invariante. Nous allons maintenant nous placer à un point de vue un peu plus général, qui nous fournira du reste une illustration des théories esquissées au Chapitre précédent.

Considérons un système de n équations différentielles ordinaires (ou un système complètement intégrable de n équations de Pfaff)

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0, \tag{1}$$

et supposons que ce système admette un certain nombre $r \leqslant n$ de transformations infinitésimales

$$A_1 f, \quad A_2 f, \; \ldots, \; A_r f.$$

Cherchons quel parti on peut tirer pour l'intégration de la connaissance de ces r transformations infinitésimales. C'est un problème qui a été résolu par S. Lie. Nous nous bornerons aux généralités essentielles.

Considérons le tableau des quantités $\omega_i(A_k)$ obtenues en remplaçant dans la forme ω_i le symbole de différentiation indéterminée par le symbole de la transformation infinitésimale $A_k f$. Supposons que dans ce tableau

$$\left\| \begin{matrix} \omega_1(A_1) & \omega_1(A_2) & \ldots & \omega_1(A_r) \\ \omega_2(A_1) & \omega_2(A_2) & \ldots & \omega_2(A_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_n(A_1) & \omega_n(A_2) & \ldots & \omega_n(A_r) \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

le déterminant formé des r premières lignes et des r colonnes ne soit pas nul. On peut alors substituer aux premiers membres des équations (1) des combinaisons linéaires de ces premiers membres de manière que le tableau devienne

$$(3) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

c'est-à-dire de manière que tous les $\omega_i(A_j)$ soient nuls, sauf

$$\omega_1(A_1) = \omega_2(A_2) = \dots = \omega_r(A_r) = 1.$$

Il est évident que si n est supérieur à r, les nouvelles formes $\omega_1, \dots, \omega_n$ ne sont pas parfaitement déterminées : on peut encore effectuer sur

$$\omega_{r+1}, \dots, \omega_n$$

une substitution linéaire quelconque et l'on peut ajouter à chacune des formes $\omega_1, \dots, \omega_r$ une combinaison linéaire quelconque de $\omega_{r+1}, \dots, \omega_n$.

Si les équations (1) avaient été mises sous la forme

$$dy_1 = dy_2 = \dots = dy_n = 0,$$

il est évident que, les quantités $\omega_i(A_j) = A_j(y_i)$ étant des intégrales premières, les nouvelles formes $\omega_1, \dots, \omega_n$ obtenues en réduisant le tableau des $\omega_i(A_j)$ à sa forme canonique pourraient toujours être supposées formées avec les y_i et leurs différentielles. Il résulte de cela et de ce qui a été dit plus haut les deux conséquences suivantes :

1° *Toutes les fois que le tableau des* $\omega_i(A_k)$ *est réduit à sa forme normale* (3), *le système de Pfaff*

$$(4) \qquad \omega_{r+1} = \dots = \omega_n = 0$$

est un système invariant ;

2° *Chacune des formes linéaires* $\omega_1, \dots, \omega_r$ *est une forme invariante, à une combinaison linéaire près des premiers membres du système de Pfaff invariant précédent.*

164. Avant d'aller plus loin, remarquons que si le système (1) admet les deux transformations infinitésimales Af et Bf, il admet la transformation infinitésimale Cf dont le symbole est défini par

$$Cf = A(Bf) - B(Af).$$

Admettons, ce qui ne restreint pas la généralité, que les symboles des transformations infinitésimales qu'on peut déduire des r transformations

données prises deux à deux soient des combinaisons linéaires de $A_1 f, \ldots, A_r f$. Autrement dit supposons qu'on a

$$(5) \qquad A_i(A_k f) - A_k(A_i f) = \sum_{s=1}^{s=r} \gamma_{iks} A_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous allons, dans cette hypothèse, démontrer que *le système de Pfaff* (4) *est complètement intégrable.*

Pour faire cette démonstration il faut que nous revenions sur la définition du covariant bilinéaire $\omega'(\delta, \delta')$ d'une forme linéaire ω, dans le cas, que nous n'avons pas encore envisagé jusqu'ici, où les deux symboles de différentiation δ, δ' *ne sont pas échangeables entre eux.* Si l'on pose

$$\omega(\delta) = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 + \ldots + a_n \delta x_n,$$

on a

$$\delta\omega(\delta') - \delta'\omega(\delta) = a_1(\delta\delta' x_1 - \delta'\delta x_1) + \ldots + a_n(\delta\delta' x_n - \delta'\delta x_n) + \sum \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)(\delta x_i \delta' x_k - \delta x_k \delta' x_i),$$

ou encore, en convenant de poser

$$\delta'' = \delta\delta' - \delta'\delta,$$

$$(6) \qquad \delta\omega(\delta') - \delta'\omega(\delta) = \omega(\delta'') + \omega'(\delta, \delta').$$

Appliquons cette formule au cas où les symboles δ et δ' sont remplacés par les symboles $A_i f$ et $A_k f$; il conviendra alors de remplacer δ'' par le symbole

$$A_i(A_k f) - A_k(A_i f) = \sum \gamma_{iks} A_s f.$$

Enfin supposons qu'on prenne pour ω l'une quelconque des formes $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$, qu'on peut, comme nous l'avons vu, supposer exprimées au moyen de $y_1, \ldots, y_n$ et leurs différentielles. On aura

$$\omega'_{r+\alpha} = \sum c_{\lambda, \mu, r+\alpha} [\omega_\lambda \omega_\mu].$$

Or

$$\omega_{r+\alpha}(A_i) = \omega_{r+\alpha}(A_k) = \omega_{r+\alpha}(A_s) = 0;$$

donc on a la relation

$$\sum c_{\lambda, \mu, r+\alpha} [\omega_\lambda(A_i)\omega_\mu(A_k) - \omega_\mu(A_i)\omega_\lambda(A_k)] = 0.$$

Il résulte de là que les coefficients $c_{\lambda, \mu, r+\alpha}$ sont nuls dès que les indices λ, μ sont tous les deux inférieurs ou égaux à r, puisque la relation précédente se réduit manifestement alors à

$$c_{i, k, r+\alpha} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Par conséquent les dérivées extérieures $\omega'_{r+1}, \ldots, \omega'_n$ étant toutes nulles quand on tient compte des équations (4), le système (4) est bien complètement intégrable (n° **101**).

II. — *Cas où il y a autant de transformations infinitésimales que de fonctions inconnues.*

165. Supposons maintenant intégré le système (4), qui est un système de Pfaff complètement intégrable absolument quelconque; supposons même simplement connue une solution de ce système (4) : à cette solution correspondent dans le système donné une infinité de solutions obtenues en intégrant les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = 0. \tag{7}$$

C'est un système dont on connaît r formes invariantes $\omega_1, \ldots, \omega_r$. On est ramené au problème traité dans le Chapitre précédent.

Il est facile ici de déterminer *a priori* les coefficients c_{iks} qui entrent dans les expressions $\omega_1', \ldots, \omega_r'$:

$$\omega_s' = \sum_{(ik)}^{1,\ldots,n} c_{iks}[\omega_i\omega_k].$$

Appliquons en effet la formule (6), en y remplaçant le symbole δ par le symbole A_α, le symbole δ' par le symbole $A_{\beta'}$, et le symbole δ'' par $\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \gamma_{\alpha\beta\rho}A_\rho$. Comme tous les $\omega_i(A_k)$ sont égaux à o ou à 1, c'est-à-dire à des constantes, la formule (6) se réduit à

$$0 = \gamma_{\alpha\beta s} + c_{\alpha\beta s}.$$

On a donc

$$c_{iks} = -\gamma_{iks}.$$

166. Bornons-nous maintenant au cas où les coefficients γ_{iks} sont des constantes. On démontre que dans ce cas *les transformations infinitésimales données* $A_1f, \ldots, A_rf$ *engendrent un groupe* Γ *à r paramètres* dont les coefficients de structure sont les γ_{iks}. On voit que le système (7) rentre dans la catégorie de ceux qui ont été étudiés au Chapitre précédent (n° **156**), et le groupe G qui lui correspond a la même structure que le groupe Γ qu'admet le système différentiel donné (7). *Ce groupe G est le plus grand groupe qui, appliqué aux intégrales premières* $y_1, \ldots, y_r$, *conserve la loi suivant laquelle ces intégrales sont échangées entre elles par les transformations infinitésimales données*. Désignons en effet par f une fonction arbitraire de $y_1, \ldots, y_r$; il est évident qu'on peut déterminer, d'une manière et d'une seule, r expressions de Pfaff $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ telles qu'on ait identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les différentielles $dy_1, \ldots, dy_r$, et aussi quels que soient les arguments $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_r}$,

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_r}dy_r = \varpi_1 A_1 f + \ldots + \varpi_r A_r f.$$

Si dans cette identité on remplace le symbole de différentiation indéterminée d par le symbole $A_k f$, on aura

$$A_k f = \varpi_1(A_k)A_1 f + \ldots + \varpi_r(A_k)A_r f;$$

par suite tous les $\varpi_i(A_k)$ sont nuls sauf

$$\varpi_1(A_1) = \varpi_2(A_2) = \ldots = \varpi_r(A_r) = 1\,;$$

par suite enfin *les formes ϖ_i sont identiques aux formes ω_i*. Effectuons alors sur $y_1, \ldots, y_r$ une transformation du groupe G, ces quantités devenant $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_r$; la fonction f de $y_1, \ldots, y_r$ devient une fonction $\bar{f}$ de $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r$; les symboles $A_1 f, \ldots, A_r f$ deviennent $\bar{A}_1\bar{f}, \ldots, \bar{A}_r\bar{f}$ et l'on a

$$d\bar{f} = \bar{\omega}_1\bar{A}_1\bar{f} + \ldots + \bar{\omega}_r\bar{A}_r\bar{f};$$

mais les $\bar{\omega}_i$ étant formés avec les $\bar{y}_i$ et leurs différentielles comme les ω_i étaient formés avec les y_i et leurs différentielles, le coefficient de $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}_k}$ dans $\bar{A}_i\bar{f}$ sera la même fonction de $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r$ que le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ dans $A_i f$ était fonction de $y_1, \ldots, y_r$. Autrement dit les transformations infinitésimales données transforment de la même manière les $\bar{y}_i$ que les y_i.

On voit encore ici que le groupe G est le plus grand groupe de transformations qui, appliquées aux intégrales premières, conservent les renseignements donnés.

III. — *Application aux équations différentielles du second ordre.*

167. Nous avons déjà traité directement le cas $n = r = 1$. Prenons quelques autres exemples. Une équation différentielle du second ordre de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

est équivalente au système

$$dy - y'dx = 0,$$
$$dy' - F(y')dx = 0,$$

qui admet les deux transformations infinitésimales

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Bf = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Pour réduire le tableau des quantités $\omega_i(A_k)$ à sa forme normale, il faut prendre

$$\omega_1 = dx - \frac{dy'}{F(y')},$$
$$\omega_2 = dy - \frac{y'dy'}{F(y')}.$$

Ces deux formes invariantes sont des différentielles exactes et on a la solution générale cherchée par deux quadratures indépendantes

$$x - \int \frac{dy'}{F(y')} = C_1, \quad y - \int \frac{y'dy'}{F(y')} = C_2.$$

Prenons maintenant une équation différentielle du second ordre de la forme

$$y \frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

elle admet une translation parallèle à l'axe des x et une homothétie de centre O, ce qui correspond aux deux transformations infinitésimales

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Bf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

L'équation donnée est équivalente au système

$$dy - y'dx = 0,$$
$$ydy' - F(y')dx = 0.$$

Pour rendre le tableau des $\omega_i(A_k)$ normal, il faut prendre

$$\omega_1 = dx - \frac{x}{y}dy - \frac{y - xy'}{F(y')}dy',$$
$$\omega_2 = \frac{dy}{y} - \frac{y'}{F(y')}dy'.$$

Comme on a ici

$$A(Bf) - B(Af) = Af,$$

on aura, ce qu'il est facile de vérifier,

$$\omega_1' = -[\omega_1\omega_2],$$
$$\omega_2' = 0.$$

Par suite l'intégration s'effectue par deux quadratures :

$$y = C_1 e^{\int \frac{y'dy'}{F(y')}},$$
$$x = C_1 \int \frac{1}{F(y')} e^{\int \frac{y'dy'}{F(y')}} dy' + C_2.$$

IV. — *Généralisations. Exemples.*

168. Il pourrait arriver, dans le cas d'un système (1) de n équations de Pfaff admettant r transformations infinitésimales

$$A_1f, \ldots, A_rf,$$

que le rang du tableau des $\omega_i(A_k)$ fût inférieur à r (cela arrive sûrement si $r > n$). Soit alors ρ le rang de ce tableau et supposons, ce qui est permis, que le déterminant formé des ρ premières lignes et des ρ premières colonnes ne soit pas nul. On aura alors, quel que soit l'indice s, $r - \rho$ relations de la forme

$$\begin{aligned}\omega_s(A_{\rho+1}) &= \lambda_{11}\omega_s(A_1) + \ldots + \lambda_{1\rho}\omega_s(A_\rho),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega_s(A_r) &= \lambda_{r-\rho,1}\omega_s(A_1) + \ldots + \lambda_{r-\rho,\rho}\omega_s(A_\rho).\end{aligned}$$

Les coefficients λ_{ij} qui s'introduisent dans ces relations sont des intégrales premières; on aura en effet, pour toute combinaison linéaire ω de $\omega_1, \ldots, \omega_n$, en particulier pour les différentielles $dy_1, \ldots, dy_n$ de n intégrales premières indépendantes, les mêmes relations

$$A_{\rho+1}(y_s) = \lambda_{11}A_1(y_s) + \ldots + \lambda_{1\rho}A_\rho(y_s),$$

qui entraînent pour $\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1\rho}$ des valeurs ne dépendant que des $A_i(y_k)$, c'est-à-dire de $y_1, \ldots, y_n$.

Nous ne poursuivrons pas davantage la théorie dans ce cas général; elle repose sur les mêmes principes que précédemment.

169. Exemple I. — Considérons l'équation différentielle

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = Ry''$$

des courbes planes qui ont un rayon de courbure donné. Elle est équivalente au système

$$\begin{aligned}\omega_1 &\equiv dy - y'dx = 0,\\ \omega_2 &\equiv R dy' - (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} dx = 0.\end{aligned}$$

Ce système admet les trois transformations infinitésimales correspondant à une translation parallèle à Ox, à une translation parallèle à Oy et à une rotation autour de O. Ces transformations doivent être calculées, non seulement en ce qui concerne leurs effets sur x et sur y, mais aussi sur y'. On trouve sans difficulté

$$\begin{aligned}A_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x},\\ A_2 f &= \frac{\partial f}{\partial y},\\ A_3 f &= -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + (1 + y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'}.\end{aligned}$$

Le tableau des quantités $\omega_i(A_k)$ est le suivant :

$$\left\| \begin{matrix} -y' & 1 & x + yy' \\ -(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} & 0 & y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} + R(1+y'^2) \end{matrix} \right\|.$$

On a donc

$$\omega_s(A_3) = -\left(y + \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\omega_s(A_1) + \left(x - \frac{Ry'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\omega_s(A_2).$$

On obtient par suite par de simples différentiations deux intégrales premières du système donné et la solution générale est fournie par les formules

$$x = \frac{Ry'}{\sqrt{1+y'^2}} + C_1,$$
$$y = \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}} + C_2,$$

ou

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2.$$

170. Exemple II. — Considérons l'équation différentielle du troisième ordre

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2},$$

qui définit les courbes planes de courbure constante. Elle est équivalente au système

$$\begin{aligned} \omega_1 &\equiv dy - y'dx = 0, \\ \omega_2 &\equiv dy' - y''dx = 0, \\ \omega_3 &\equiv dy'' - \frac{3y'y''}{1+y'^2}\, dy' = 0. \end{aligned}$$

Ce système admet quatre transformations infinitésimales correspondant à une translation parallèle à Ox, une translation parallèle à Oy, une rotation autour de O et une homothétie de centre O. Les symboles de ces transformations, considérées comme opérant sur x, y, y' et y'', sont

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$A_2 f = \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$A_3 f = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + (1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial f}{\partial y''},$$
$$A_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - y''\frac{\partial f}{\partial y''}.$$

Le tableau des quantités $\omega_i(A_k)$ est ici

$$\left\| \begin{matrix} -y' & 1 & x + yy' & y - xy' \\ -y'' & 0 & 1 + y'^2 + yy'' & -xy'' \\ 0 & 0 & 0 & -y'' \end{matrix} \right\|.$$

Il est de rang 3 et, par exemple, le déterminant obtenu en prenant la 1re, la 2e et la 4e colonne est différent de zéro. On en déduit les relations

$$\omega_s(A_3) = -\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)\omega_s(A_1) + \left(x - y'\,\frac{1+y'^2}{y''}\right)\omega_s(A_2),$$

qui conduisent à deux intégrales premières

$$u = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''},$$

$$v = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Pour continuer l'intégration, choisissons des combinaisons linéaires $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ telles que le déterminant principal du tableau des $\bar{\omega}_i(A_k)$ soit réduit à sa forme normale. Il faut pour cela prendre

$$\bar{\omega}_1 = dx - \left(\frac{1}{y''} + \frac{3xy'}{1 + y'^2}\right) dy' + x \frac{dy''}{y''},$$

$$\bar{\omega}_2 = dy - \left(\frac{y'}{y''} + \frac{3yy'}{1 + y'^2}\right) dy' + y \frac{dy''}{y''},$$

$$\bar{\omega}_3 = \frac{3y'dy'}{1 + y'^2} - \frac{dy''}{y''}.$$

On a d'autre part

$$du = \bar{\omega}_1 + u\bar{\omega}_3,$$

$$dv = \bar{\omega}_2 + v\bar{\omega}_3,$$

et

$$\bar{\omega}_1' = -[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_3],$$

$$\bar{\omega}_2' = -[\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3],$$

$$\bar{\omega}_3' = 0.$$

Par suite $\bar{\omega}_3$ est une différentielle exacte et on a *par une quadrature* l'intégrale première qui manque. La solution générale de l'équation donnée est fournie par les formules

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = C_3,$$

$$x = \frac{C_3 y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + C_1,$$

$$y = -\frac{C_3}{\sqrt{1 + y'^2}} + C_2.$$

On voit ici que le groupe G qui conserve les données est

$$\bar{C}_1 = C_1, \quad \bar{C}_2 = C_2, \quad \bar{C}_3 = aC_3 \quad \left(\text{car } \bar{\omega}_3 = \frac{dC_3}{C_3}\right)$$

avec une constante arbitraire a ; c'est parce qu'il est à un seul paramètre que l'intégration se ramène à une quadrature. Dans l'exercice précédent, le groupe G se réduisait à la transformation identique et la solution était obtenue sans intégration.

171. Remarque. — Dans tous les exemples où on arrive à n formes linéaires invariantes, on a des invariants intégraux de tous les degrés en

construisant avec $\omega_1, \ldots, \omega_n$ une forme extérieure arbitraire à coefficients constants. C'est ainsi que dans le dernier exercice on a l'invariant intégral $\iiint \overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \overline{\omega}_3$ qui, si on se borne à des ensembles d'états correspondant à la même valeur de x, se réduit à

$$\iiint \frac{dy\,dy'\,dy''}{y''^2}.$$

Par suite, si on considère une famille quelconque de circonférences dépendant de trois paramètres et si on coupe les cercles de cette famille par une parallèle quelconque à l'axe des y, l'intégrale $\iiint \frac{dy\,dy'\,dy''}{y''^2}$, étendue à la famille considérée de cercles, est indépendante de x. Elle est du reste égale à $\iiint \frac{dC_1\,dC_2\,dC_3}{C_3}$, en désignant par C_1 et C_2 les coordonnées du centre et C_3 le rayon.

CHAPITRE XVII.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AU PROBLÈME DES n CORPS.

I. — *Réduction du nombre des degrés de liberté.*

172. Nous avons déjà vu (n° **123**) comment, pour les équations canoniques de la Dynamique

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

se présente la méthode d'intégration exposée au Chapitre XII. Nous y supposions la fonction H quelconque. Si cette fonction est indépendante du temps, la fonction H est une intégrale première (n° **92**) et on est ramené à l'intégration des équations

$$\frac{dq_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{\partial H}{\partial q_i}},$$

dont les intégrales premières sont les solutions de l'équation

$$(Hf) = 0,$$

et à une quadrature.

173. Nous allons étudier d'un peu plus près la réduction qui se produit dans l'intégration du problème des n corps, en tenant compte des transformations infinitésimales déjà déterminées (n° **93**) qu'admettent les équations du mouvement. Nous supposerons, ce qui est permis, le système des n corps rapporté à son centre de gravité, c'est-à-dire les $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i et les $3n$ composantes des vitesses x_i', y_i', z_i' liées par les relations

$$\sum m_i x_i = 0, \qquad \sum m_i y_i = 0, \qquad \sum m_i z_i = 0,$$
$$\sum m_i x_i' = 0, \qquad \sum m_i y_i' = 0, \qquad \sum m_i z_i' = 0.$$

Soit U la fonction des forces, supposée homogène et de degré $-p$ par rapport aux coordonnées. Les équations du mouvement admettent les cinq transformations infinitésimales

$$A_0 f = \frac{\partial f}{\partial t},$$
$$A_1 f = \sum\left(y_i \frac{\partial f}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + y_i' \frac{\partial f}{\partial z_i'} - z_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'}\right),$$
$$A_2 f = \sum\left(z_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + z_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'} - x_i' \frac{\partial f}{\partial z_i'}\right),$$
$$A_3 f = \sum\left(x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + x_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'} - y_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'}\right),$$
$$A_4 f = \sum\left[x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} - \frac{p}{2}\left(x_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'} + y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'} + z_i' \frac{\partial f}{\partial z_i'}\right)\right] + \left(1 + \frac{p}{2}\right) t \frac{\partial f}{\partial t}.$$

On a d'autre part

$$\omega' = \sum \left\{ m_i[\delta x_i' \delta x_i] + m_i[\delta y_i' \delta y_i] + m_i[\delta z_i' \delta z_i] \right\} - [\delta H \delta t],$$

en posant

$$H = \frac{1}{2} \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - U.$$

174. Les cinq formes linéaires invariantes

$$\omega_i = \omega'(A_i, \delta)$$

sont

$$(1)\quad \begin{cases} \omega_0 = \delta H, \\ \omega_1 = \delta H_1, \\ \omega_2 = \delta H_2, \\ \omega_3 = \delta H_3, \\ \omega_4 = -\sum m_i\left(x_i \delta x_i' + y_i \delta y_i' + z_i \delta z_i' + \frac{p}{2} x_i' \delta x_i + \frac{p}{2} y_i' \delta y_i + \frac{p}{2} z_i' \delta z_i\right) \\ \qquad\qquad + \left(1 + \frac{p}{2}\right) t \delta H + p H \delta t, \end{cases}$$

en posant

$$(2)\quad \begin{cases} H_1 = \sum m_i(y_i' z_i - z_i' y_i), \\ H_2 = \sum m_i(z_i' x_i - x_i' z_i), \\ H_3 = \sum m_i(x_i' y_i - y_i' x_i). \end{cases}$$

On a enfin

$$\omega_4' = A_4(\omega') = \left(1 - \frac{p}{2}\right) \omega'.$$

Le tableau des quantités $a_{ij} = \omega'(A_i, A_j)$ a déjà été dressé dans un cas un peu plus général (n° **95**). Nous le reproduisons ci-dessous.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	o	o	o	o	$-pH$
1	o	o	H_3	$-H_2$	$(1-\frac{p}{2})H_1$
2	o	$-H_3$	o	H_1	$(1-\frac{p}{2})H_2$
3	o	H_2	$-H_1$	o	$(1-\frac{p}{2})H_3$
4	pH	$(\frac{p}{2}-1)H_1$	$(\frac{p}{2}-1)H_2$	$(\frac{p}{2}-1)H_3$	o

175. Nous connaissons maintenant cinq formes linéaires invariantes et le tableau des coefficients a_{ij} définis par l'opération de la parenthèse de Poisson généralisée :

$$N[\omega'^{N-1}\omega_i\omega_j] = a_{ij}[\omega'^N].$$

Appliquons la théorie du Chapitre XII (n° **125**). Construisons la forme auxiliaire

$$\Phi(\xi) = \sum_{(ij)}^{0, 1, \ldots, 4} a_{ij}[\xi_i\xi_j];$$

elle s'écrit

$$\Phi(\xi) = pH[\xi_4\xi_0] + \frac{p-2}{2}[\xi_4(H_1\xi_1 + H_2\xi_2 + H_3\xi_3)] + H_1[\xi_2\xi_3] + H_2[\xi_3\xi_1] + H_3[\xi_1\xi_2].$$

Elle est de rang 4 et sa réduction à sa forme normale

$$\Phi = [\xi_4'\xi_0'] + [\xi_1'\xi_2']$$

peut se faire en posant

$$\xi_0' = pH\xi_0 + \frac{p-2}{2}(H_1\xi_1 + H_2\xi_2 + H_3\xi_3),$$
$$\xi_4' = \xi_4,$$
$$\xi_1' = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3,$$
$$\xi_2' = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3,$$
$$\xi_3' = \xi_0,$$

où les α_i et β_i sont choisis, ce qui est toujours possible, de manière à avoir

$$\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 = H_1, \quad \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = H_2, \quad \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = H_3;$$

on peut ajouter les conditions supplémentaires

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}.$$

Or, en définissant cinq formes linéaires ϖ_0, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4 par l'identité

$$\xi_0\omega_0 + \xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2 + \xi_3\omega_3 + \xi_4\omega_4 = \xi_0'\varpi_0 + \xi_1'\varpi_1 + \xi_2'\varpi_2 + \xi_3'\varpi_3 + \xi_4'\varpi_4,$$

on obtient sans difficulté

$$\varpi_4 = \omega_4,$$

$$\varpi_0 = \frac{2}{p-2}\,\frac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2},$$

$$\varpi_3 = dH - \frac{2pH}{p-2}\,\frac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2},$$

$$\varpi_1 = \frac{\alpha_1dH_1 + \alpha_2dH_2 + \alpha_3dH_3}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}},$$

$$\varpi_2 = \frac{\beta_1dH_1 + \beta_2dH_2 + \beta_3dH_3}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}}.$$

La forme auxiliaire Φ ayant été réduite à $[\xi_4'\xi_0'] + [\xi_1'\xi_2']$, on a

$$\omega' = [\varpi_4\varpi_0] + [\varpi_1\varpi_2] + [\omega_5\varpi_3] + [\omega_6\omega_7] + \ldots,$$

c'est-à-dire, en effectuant les calculs,

$$(3)\quad \begin{cases} \omega' = \dfrac{2}{p-2}\left[\omega_4\,\dfrac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\right] \\ \quad + \dfrac{H_1[dH_2dH_3] + H_2[dH_3dH_1] + H_3[dH_1dH_2]}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2} + \Omega, \end{cases}$$

en posant

$$(4)\quad \Omega = \left[\omega_5\left(dH - \frac{2pH}{p-2}\,\frac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\right)\right] + [\omega_6\omega_7] + \ldots$$

176. Si l'on égale les quatre intégrales premières H, H_1, H_2, H_3 à des constantes arbitraires, le rang de ω' se réduit de six unités ; il est donc passé de $6n-6$ à $6n-12$, correspondant par conséquent à un problème à $3n-6$ degrés de liberté (3 dans le cas du problème des trois corps). Mais le système caractéristique correspondant contient des paramètres arbitraires.

Il y a un procédé (théorique) pour réduire le nombre des degrés de liberté tout en évitant l'introduction de paramètres arbitraires. En annulant la dérivée extérieure du second membre de l'équation (3) et tenant compte de la relation

$$\omega_4' = \frac{2-p}{2}\,\omega',$$

on obtient

$$\Omega' = \left[\frac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\,\Omega\right].$$

Cette relation exprime que la dérivée extérieure de la forme quadratique

$$\frac{1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}}\,\Omega = \frac{1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}}\,\omega' - \frac{2}{p-2}\left[\omega_4 \frac{H_1 dH_1 + H_2 dH_2 + H_3 dH_3}{(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$
$$-\frac{H_1[dH_2 dH_3] + H_2[dH_3 dH_1] + H_3[dH_1 dH_2]}{(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{2}{2-p}\left(\frac{1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}}\,\omega_4\right)' - \frac{H_1[dH_2 dH_3] + H_2[dH_3 dH_1] + H_3[dH_1 dH_2]}{(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

est nulle. Cette propriété est du reste mise en évidence dans le dernier membre de l'égalité précédente dont le premier terme, étant une dérivée extérieure exacte, a une dérivée extérieure nulle. Nous allons voir qu'il en est de même du second terme.

Pour interpréter ce second terme, considérons le vecteur (OS) de longueur $\gamma = \sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}$, qui représente le moment cinétique du système par rapport à l'origine et qui a pour projections H_1, H_2, H_3. Si l'on imagine un élément de surface $d\sigma$ décrit par le point S, et si l'on appelle α_1, α_2, α_3 les cosinus directeurs de la normale à cet élément de surface, on a

$$[dH_2 dH_3] = \alpha_1 d\sigma, \quad [dH_3 dH_1] = \alpha_2 d\sigma, \quad [dH_1 dH_2] = \alpha_3 d\sigma,$$

et par suite

$$\frac{H_1[dH_2 dH_3] + H_2[dH_3 dH_1] + H_3[dH_1 dH_2]}{(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3}{\gamma^3}\,d\sigma = \frac{\cos\psi\, d\sigma}{\gamma^2} = d\omega,$$

ψ représentant l'angle de OS avec la normale à l'élément, et $d\omega$ l'angle solide sous lequel on voit de l'origine cet élément de surface. En désignant par θ et φ la colatitude (angle avec Oz) et la longitude (angle du plan zOS avec le plan xOz) du point S, on a d'autre part

$$d\omega = \sin\theta[d\theta d\varphi];$$

par suite la forme considérée peut être regardée comme la dérivée extérieure de la forme linéaire $-\cos\theta d\varphi$.

Posons alors

$$\varpi = \frac{2}{2-p}\frac{\omega_4}{\gamma} + \cos\theta d\varphi: \tag{5}$$

nous voyons que *les équations caractéristiques de l'invariant intégral relatif* $\int\varpi$ sont

$$\begin{cases} dH - \dfrac{2p}{p-2} H \dfrac{d\gamma}{\gamma} = 0, \\ \omega_5 = 0,\ \omega_6 = 0,\ \omega_7 = 0,\ \ldots \end{cases} \tag{6}$$

II. — *Les équations du mouvement rapporté à un système de référence mobile.*

177. Il est facile d'interpréter ce système. Nous nous placerons, pour fixer les idées, dans le cas du problème des trois corps de la Mécanique céleste ($p = 1$). Calculons d'abord les quantités $\omega_5(A_i)$, $\omega_6(A_i)$, etc. Pour cela appliquons aux deux membres de la formule (3) l'opération correspondant à $A_i f$, mais en n'écrivant que les termes en dH, $\omega_6, \omega_7, \ldots, \omega_{11}$. Nous aurons immédiatement

$$\begin{aligned} dH &= \omega_5(A_0)dH - \omega_7(A_0)\omega_6 + \omega_6(A_0)\omega_7 + \ldots + \omega_{10}(A_0)\omega_{11}, \\ 0 &= \omega_5(A_1)dH - \omega_7(A_1)\omega_6 + \omega_6(A_1)\omega_7 + \ldots + \omega_{10}(A_1)\omega_{11}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \omega_5(A_4)dH - \omega_7(A_4)\omega_6 + \omega_6(A_4)\omega_7 + \ldots + \omega_{10}(A_4)\omega_{11}. \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi que, pour $\alpha \geqslant 5$, tous les $\omega_\alpha(A_i)$ sont nuls, sauf $\omega_5(A_0)$ qui est égal à 1.

Remarquons d'autre part que les quantités $A_i H + 2H \frac{A_i\gamma}{\gamma}$ sont toutes nulles, puisque la fonction $K = H\gamma^2$ est invariante pour chacune des transformations infinitésimales considérées. Nous voyons que le *système* (6) *caractéristique de* $\frac{1}{\gamma}\,\Omega$ *peut être défini comme formé de toutes les combinaisons linéaires des équations du mouvement qui jouissent de la propriété d'être vérifiées identiquement quand on y remplace le symbole de différentiation indéterminée par le symbole de l'une quelconque des transformations infinitésimales* $A_1 f$, $A_2 f$, $A_3 f$, $A_4 f$.

178. C'est ce résultat qui va nous permettre d'interpréter géométriquement le système (6).

Imaginons pour cela les différents systèmes de référence possibles, chaque système de référence étant défini par trois axes de coordonnées rectangulaires, une origine du temps et les unités de longueur, de temps et de masse. Nous fixerons une fois pour toutes l'unité de masse et nous imposerons aux autres unités la condition que la constante de l'attraction universelle ait une valeur numérique fixe. L'unité de longueur est encore arbitraire. Enfin nous fixerons l'origine des axes, qui sera le centre de gravité du système des trois corps, ainsi que l'origine du temps.

Les systèmes de référence qui restent disponibles dépendent de quatre paramètres arbitraires ; trois d'entre eux fixent l'orientation des axes et un quatrième fixe les unités.

A chaque *état* des trois corps (défini par leurs positions, leurs vitesses et le temps, et dépendant de 13 variables) on peut faire correspondre, suivant une

loi déterminée à l'avance, un système de référence mobile de manière à réduire de 4 unités le nombre des quantités qui fixent l'état des trois corps par rapport à ce système de référence. On pourra *par exemple* choisir pour axe des x la droite qui joint le centre de gravité O au corps A_1, pour plan des xy le plan des trois corps, et pour unité de longueur la distance OA_1 : l'état des trois corps est alors défini par les deux coordonnées de A_2, les six projections sur les trois axes des vitesses de A_1 et de A_2, et enfin le temps t. On pourrait fixer par une autre loi le choix du système de référence mobile correspondant à un état donné ; en prenant toujours Oz perpendiculaire au plan des trois corps, on pourrait prendre Ox parallèle à A_1A_2 et prendre pour unité de longueur le côté A_1A_2. On pourrait encore choisir les axes suivant l'une des deux lois précédentes, mais choisir les unités de manière que le moment cinétique OS soit mesuré par le nombre 1. On pourrait encore prendre Oz perpendiculaire au plan des trois corps, prendre pour plan des xz le plan zOS et choisir les unités de manière à mesurer OS par le nombre 1. Dans cette dernière hypothèse les neuf quantités qui détermineraient l'état des trois corps par rapport au système de référence mobile seraient les deux coordonnées de A_1, les deux coordonnées de A_2, le temps, et enfin les six composantes des vitesses de A_1 et de A_2, ce qui ferait 11 quantités, mais liées par les deux relations $\gamma = 1$, $\varphi = 0$.

Supposons maintenant que nous ayons fait choix d'une des lois précédentes ou de toute autre loi imaginable pour faire correspondre à chaque état des trois corps un système de référence mobile, et soient

$$q_1, q_2, \ldots, q_9$$

les neuf quantités qui déterminent l'état des trois corps par rapport au système de référence mobile correspondant. L'état des trois corps sera déterminé par rapport à un système de référence fixe si on connaît, outre $q_1, \ldots, q_9$, les quatre paramètres u_1, u_2, u_3, u_4 qui définissent la position du système de référence mobile par rapport au système de référence fixe ; ces quatre paramètres seront par exemple les trois paramètres dont dépendent les neuf cosinus directeurs et le rapport de l'unité de longueur mobile à l'unité de longueur fixe. Finalement les quantités (au nombre de 19, mais se réduisant à 13) :

$$x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', t,$$

qui fixent l'état des trois corps par rapport au système de référence fixe sont des fonctions déterminées des 13 quantités

$$q_1, q_2, \ldots, q_9; \quad u_1, u_2, u_3, u_4.$$

Inversement ces dernières sont des fonctions déterminées des premières. Or *les 9 quantités $q_1, \ldots, q_9$, considérées comme fonctions des $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', t$, sont manifestement invariantes par chacune des transformations infinitésimales* $A_1f, \ldots, A_4f$, car effectuer une de ces transformations revient à changer le système de référence fixe, par suite altérer les quantités u_1, u_2, u_3, u_4 qui

définissent la relation entre le système de référence mobile et le système de référence fixe, mais sans altérer les quantités q_i qui définissent l'état des trois corps par rapport au système de référence mobile.

On peut dire encore que si l'on cherche toutes les formes différentielles linéaires en dx_i, dy_i, ..., dz_i', dt qui jouissent de la propriété de s'annuler quand on y remplace le symbole d par l'un des symboles $A_1 f$, ..., $A_4 f$, on trouve toutes les combinaisons linéaires en dq_1, ..., dq_9, et uniquement celles-là.

En particulier les équations (6) du système caractéristique de Ω ont leurs premiers membres linéaires en dq_1, ..., dq_9. Comme elles sont au nombre de 8, ces équations (6) peuvent se mettre sous la forme

$$dq_i - C_i dq_9 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8);$$

et, comme elles sont complètement intégrables, les C_i ne dépendent que des q_i. Autrement dit le système (6) est un système d'équations différentielles ordinaires en q_1, ..., q_9 : *il définit donc le mouvement des trois corps par rapport au système de référence mobile.*

179. Il est maintenant facile de former effectivement les équations du système (6). Partons pour cela de l'invariant intégral relatif $\int \varpi$, où on a posé

$$\varpi = \frac{2}{\gamma}\,\omega_4 + \cos\theta\, d\varphi,$$

et imaginons que nous ayons exprimé toutes les quantités x_i, y_i, ..., z_i', t au moyen de q_1, ..., q_9, u_1, ..., u_4. Nous savons d'abord que les différentielles du_1, du_2, du_3, du_4 ne doivent pas figurer dans l'expression définitive de ϖ' qui doit être formé uniquement au moyen des formes linéaires $dq_i - C_i dq_9$. Par suite nous pouvons, pour calculer ϖ', regarder u_1, ..., u_4 comme des paramètres fixes. De plus les coefficients de la forme ϖ', exprimée au moyen de dq_1, ..., dq_9, ne doivent pas contenir les variables u_1, ..., u_4, sans cela la dérivée extérieure de ϖ' ne serait pas nulle : on peut donc, pour faire le calcul, non seulement regarder u_1, ..., u_4 comme des paramètres fixes, mais *on peut encore leur donner des valeurs numériques arbitraires.* On peut donc en particulier leur donner les valeurs numériques qui correspondraient au cas où le système de référence fixe se confondrait avec le système de référence mobile. Autrement dit *on peut, pour former ϖ', donner dans ϖ aux quantités x_i, y_i, ..., z_i', t les valeurs X_i, Y_i, ..., Z_i', T qui définissent l'état des trois corps par rapport au système de référence mobile* ; ces treize quantités X_i, ..., T se ramenant, comme nous l'avons vu, à neuf.

180. Examinons en particulier le cas où l'unité de longueur mobile est choisie de manière à réduire γ à l'unité (l'unité de longueur mobile se trouve alors fixe). On a dans ce cas

$$\varpi = 2\omega_4 + \cos\theta\, d\varphi;$$

en ajoutant une différentielle exacte, on a, pour les équations différentielles cherchées, l'invariant intégral relatif $\int \omega + \cos\theta d\varphi$.

L'axe des z étant supposé normal au plan des trois corps et l'axe des x par exemple parallèle à A_1A_2, la position du triangle dépend de trois quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3. Or on a

$$\begin{aligned}\omega + \cos\theta d\varphi &= \sum m_i(X_i' dX_i + Y_i' dY_i) - H dT + \cos\theta d\varphi \\ &= \eta_1 d\xi_1 + \eta_2 d\xi_2 + \eta_3 d\xi_3 + \eta_4 d\xi_4 - H dT,\end{aligned}$$

en posant

$$\xi_4 = \varphi, \qquad \eta_4 = \cos\theta.$$

Les équations du mouvement relatif cherché sont alors

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Elles sont canoniques et admettent l'intégrale première $H = C^{te}$.

On pourrait prendre par exemple pour ξ_1, ξ_2, ξ_3 *les longueurs des trois côtés du triangle* $A_1A_2A_3$.

Si l'on supposait le mouvement plan, θ serait nul, et il n'y aurait plus que six fonctions inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3.

181. Une fois connu le mouvement des trois corps par rapport au système de référence mobile, le mouvement absolu se déterminerait par une quadrature. En effet d'abord, connaissant les projections sur les axes mobiles du moment cinétique OS, on aurait le rapport des unités mobiles aux unités fixes en se donnant le nombre constant C qui mesure OS par rapport au système de référence fixe. On pourrait alors prendre OS comme axe des z fixe, la position des axes fixes dépendant d'un angle inconnu. Cet angle serait donné par une quadrature : il suffit en effet de remarquer que la forme invariante ω_4 (exprimée au moyen des coordonnées *fixes*) est une différentielle exacte quand on tient compte des relations supposées obtenues qui définissent le mouvement relatif : la formule

$$2\omega_4' = \omega' = 2\left[\frac{d\gamma}{\gamma}\,\omega_4\right] + \frac{H_1[dH_2 dH_3] + [H_2 dH_3 dH_1] + H_3[dH_1 dH_2]}{\gamma^2} + \Omega$$

montre en effet que dans ces conditions ω_4' est nul (H_1 et H_2 étant nuls). L'intégration est donc achevée au moyen de la formule

$$\int \omega_4 = C^{te}.$$

On peut remarquer que cette quadrature peut se faire lorsqu'on a déterminé le mouvement relatif au seul point de vue géométrique avant d'avoir trouvé le temps (par une quadrature comme l'on sait). Autrement dit les deux quadratures qui donnent le temps (dans le mouvement relatif) et

l'orientation définitive des axes fixes par rapport aux axes mobiles *peuvent se faire indépendamment l'une de l'autre.*

III. — *Cas où les constantes des aires sont toutes nulles.*

182. La théorie précédente suppose essentiellement $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 \neq 0$. Etudions les mouvements pour lesquels les constantes des aires seraient nulles toutes les trois. Dans ce cas il faut supposer les 18 quantités

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\quad x_i',\ y_i',\ z_i'$$

non seulement liées par les relations

$$\sum m_i x_i = 0, \quad \sum m_i y_i = 0, \quad \sum m_i z_i = 0,$$
$$\sum m_i x_i' = 0, \quad \sum m_i y_i' = 0, \quad \sum m_i z_i' = 0,$$

mais encore par les relations

$$\sum m_i(y_i' z_i - z_i' y_i) = 0, \quad \sum m_i(z_i' x_i - x_i' z_i) = 0, \quad \sum m_i(x_i' y_i - y_i' x_i) = 0.$$

Il est facile de voir que le plan du triangle des trois corps reste fixe, car les composantes des trois vitesses qui sont normales à ce plan sont toutes nulles, si du moins les trois corps ne sont pas en ligne droite,

Nous pouvons donc supposer les z_i et z_i' tous nuls, et il reste entre les 12 quantités x_i, y_i, x_i', y_i' les cinq relations

$$\sum m_i x_i = 0, \quad \sum m_i y_i = 0,$$
$$\sum m_i x_i' = 0, \quad \sum m_i y_i' = 0,$$
$$\sum m_i(x_i' y_i - y_i' x_i) = 0.$$

Il y a donc en tout sept variables dépendantes et une variable indépendante (le temps). Or ω', qui est de rang pair, ne peut pas être de rang égal au nombre des équations différentielles du mouvement; *le système caractéristique de ω' ne se confond pas avec celui des équations du mouvement.*

Nous avons ici trois transformations infinitésimales $A_0 f$, $A_3 f$, $A_4 f$ avec

$$\omega'(A_0, \delta) = \delta H, \quad \omega'(A_3, \delta) = 0, \quad \omega'(A_4, \delta) = \omega_4.$$

Les sept équations différentielles du mouvement peuvent être mises sous forme d'équations de Pfaff

$$\varpi_1 = 0,\ \varpi_2 = 0,\ \dots,\ \varpi_7 = 0,$$

et on peut supposer

$$\varpi_1(A_3) = \dots = \varpi_6(A_3) = 0, \quad \varpi_7(A_3) = 1.$$

La forme ω'', qui peut s'exprimer au moyen de $\varpi_1, \ldots, \varpi_7$, *ne contient sûrement pas* ϖ_7, sinon la forme $\omega'(A_3, \delta)$ ne serait pas identiquement nulle. Par suite *le système caractéristique de* ω'' *est le système complètement intégrable*

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_6 = 0 :$$

il donne le mouvement des trois corps *indépendamment de l'orientation du triangle des trois corps autour de leur centre de gravité.* Ce système une fois intégré, *l'orientation est donnée par une quadrature.* La relation $\varpi_7(A_3) = 1$ assure en effet à ϖ_7 la propriété d'être une forme invariante pour l'équation différentielle $\varpi_7 \doteq 0$.

Revenons maintenant à la forme ω' de rang 6. Son système caractéristique admet les deux transformations infinitésimales $A_0 f$ et $A_4 f$ qui donnent naissance à deux formes linéaires invariantes $\omega_0 = \delta H$ que nous désignerons par ϖ_1, et ω_4 que nous désignerons par ϖ_2. Nous supposerons, ce qui est permis, que pour chacune des formes $\varpi_3, \ldots, \varpi_6$, on a $\varpi(A_0) = \varpi(A_4) = 0$. Un calcul analogue à celui qui a été fait dans le cas général donne

$$\omega' = -\frac{1}{H}[\varpi_1 \varpi_2] + \Omega = -\frac{1}{H}[\delta H \varpi_2] + \Omega,$$

Ω étant de rang 4 et formé avec $\varpi_3, \varpi_4, \varpi_5, \varpi_6$.

Comme on l'a vu plus haut, on a $\omega' = 2\omega_4' = 2\varpi_2'$, par suite

$$\Omega = 2\varpi_2' + \left[\frac{\delta H}{H}\varpi_2\right] = \frac{2}{\sqrt{H}}(\sqrt{H}\,\varpi_2)'.$$

La forme $\frac{1}{2}\sqrt{H}.\ \Omega$ est donc une dérivée exacte ; elle admet par suite pour système caractéristique les équations

$$\varpi_3 = \varpi_4 = \varpi_5 = \varpi_6 = 0. \tag{7}$$

Ce système peut être intégré par des équations d'ordres

$$4, \quad 2, \quad 0.$$

En définitive les équations du mouvement seront données par des opérations d'ordres 4 et 2 suivies de deux quadratures.

Remarquons que la forme $\sqrt{H}\varpi_2$, qui joue le rôle d'invariant relatif pour le système (7), est égale, d'après l'expression (1) de $\omega_4 = \varpi_2$, à

$$\sqrt{H}\varpi_2 = -\sqrt{H}\sum m_i\left(x_i\delta x_i' + y_i\delta y_i' + \frac{1}{2}x_i'\delta x_i + \frac{1}{2}y_i'\delta y_i\right) + \delta\left(H^{\frac{3}{2}}t\right).$$

Le système (7) est facile à interpréter : il donne le mouvement des trois corps par rapport à un système de référence mobile qu'on peut faire correspondre suivant une loi déterminée à chaque état des trois corps, *l'origine du temps n'étant plus nécessairement fixe.* On peut par exemple choisir pour origine mobile du temps l'instant actuel, et fixer l'unité de longueur par la condition que l'énergie H ait une valeur numérique fixe donnée. Les équations du système s'obtiennent en partant de la forme $\sqrt{H}\varpi_2$, dans laquelle on fait inter-

venir les coordonnées *mobiles* : on peut évidemment, dans l'hypothèse envisagée, lui substituer la forme

$$\sum m_i(x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i).$$

Ici les quantités de mouvement des trois corps forment un système de vecteurs équivalent à zéro : on peut donc regarder la quantité de mouvement du corps A_i comme la résultante de deux vecteurs u_j et u_k dirigés suivant les côtés A_iA_k et A_iA_j et comptés positivement dans les prolongements de A_kA_i et A_jA_i. On a alors, en désignant par r_1, r_2, r_3 les trois côtés du triangle,

$$\omega = u_1\delta r_1 + u_2\delta r_2 + u_3\delta r_3.$$

On a de plus

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2m_1}\left(u_2^2 + u_3^2 + u_2u_3\frac{r_2^2 + r_3^2 - r_1^2}{r_2r_3}\right) + \ldots - f\left(\frac{m_2m_3}{r_1} + \frac{m_3m_1}{r_2} + \frac{m_1m_2}{r_3}\right) = h.$$

Les équations du mouvement relatif sont alors

$$\frac{dr_1}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_1}} = \frac{dr_2}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_2}} = \frac{dr_3}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_3}} = \frac{-du_1}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r_1}} = \frac{-du_2}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r_2}} = \frac{-du_3}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r_3}}.$$

IV. — *Cas où la constante des forces vives est nulle.*

183. La théorie précédente suppose implicitement que la constante des forces vives n'est pas nulle. Si nous la supposons nulle, les variables sont soumises à une nouvelle relation

$$\frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2) - \mathrm{U} = 0;$$

il n'y a plus que six variables dépendantes et une variable indépendante. La forme invariante $\omega'(A_0, \delta)$ est ici identiquement nulle, de même que la forme $\omega'(A_3, \delta)$.

Le système des équations du mouvement peut être mis sous la forme

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_6 = 0,$$

et on peut supposer (n° **163**)

$$\varpi_1(A_0) = \varpi_2(A_0) = \ldots = \varpi_4(A_0) = 0, \quad \varpi_5(A_0) = 1, \quad \varpi_6(A_0) = 0,$$
$$\varpi_1(A_3) = \varpi_2(A_3) = \ldots = \varpi_4(A_3) = 0, \quad \varpi_5(A_3) = 0, \quad \varpi_6(A_3) = 1.$$

La forme ω', exprimée au moyen des ϖ_i, ne contient évidemment ni ϖ_5 ni ϖ_6. Supposons enfin

$$\varpi_2(A_4) = \varpi_3(A_4) = \varpi_4(A_4) = 0, \quad \varpi_1(A_4) = 1,$$

et $\omega'(A_4, \delta) = \varpi_2$. On aura

$$\omega' = 2\varpi_2' = [\varpi_1\varpi_2] + [\varpi_3\varpi_4].$$

La forme ϖ_2 est du second type et les équations

$$\varpi_2 = \varpi_3 = \varpi_4 = 0$$

forment un système complètement intégrable, caractéristique de l'équation $\varpi_2 = 0$: c'est celui qui définit le mouvement des trois corps par rapport à un système de référence mobile, l'origine du temps pouvant être variable. On peut ici par exemple supposer choisi pour unité de longueur le côté r_3 du triangle. Les équations à intégrer constituent alors le système caractéristique de l'*équation* de Pfaff

$$2d(u_1r_1 + u_2r_2 + u_3) - u_1dr_1 - u_2dr_2 = 0,$$

les quantités u_1, u_2, u_3, r_1, r_2 étant liées par la relation

$$\frac{1}{2m_1}(u_2^2 + u_3^2 + 2u_2u_3\cos A_1) + \ldots - f\left(\frac{m_2m_3}{r_1} + \frac{m_3m_1}{r_2} + m_1m_2\right) = 0.$$

En posant

$$r_1 = x, \quad r_2 = y, \quad u_1r_1 + u_2r_2 + u_3 = z, \quad u_1 = 2p, \quad u_2 = 2q,$$

on est ramené à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\begin{aligned}2\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)p^2+2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3}\right)q^2+\frac{2}{m_3}\frac{x^2+y^2-1}{xy}pq \\ +(z-2px-2qy)\left(\frac{p}{m_2}\frac{x^2+1-y^2}{x}+\frac{q}{m_1}\frac{y^2+1-x^2}{y}\right) \\ +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)(z-2px-2qy)^2-f\left(\frac{m_2m_3}{x}+\frac{m_1m_3}{y}+m_1m_2\right)=0.\end{aligned}$$

Cette équation étant intégrée, on a par des différentiations la solution générale du système caractéristique de ω', car ϖ_2 étant mise sous la forme $Z_1dY_1 + Z_2dY_2$, on en déduit par des différentiations les intégrales premières Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 de ce système.

Mais les équations du mouvement ne sont pas encore intégrées complètement ; il faut encore intégrer les équations

$$\varpi_5 = \varpi_6 = 0.$$

Elles constituent un système d'équations différentielles admettant les deux transformations infinitésimales A_0f, A_3f, et le tableau

$$\begin{Vmatrix} \varpi_5(A_0) & \varpi_5(A_3) \\ \varpi_6(A_0) & \varpi_6(A_3) \end{Vmatrix}$$

est précisément réduit à sa forme normale

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Comme d'autre part les deux transformations $A_0 f$, $A_3 f$ sont échangeables entre elles, puisqu'on a

$$A_0(A_3 f) - A_3(A_0 f) = 0,$$

on a

$$\varpi_5' = 0,$$
$$\varpi_6' = 0.$$

Par suite l'intégration s'effectue au moyen de deux quadratures indépendantes ; l'une donne l'orientation du triangle $A_1A_2A_3$, l'autre donne le temps.

CHAPITRE XVIII.

—

LES INVARIANTS INTÉGRAUX ET LE CALCUL DES VARIATIONS.

I. — *Les extrémales attachées à un invariant intégral relatif.*

184. Nous avons déjà vu au Chapitre I[er] (n° **9**) que les équations différentielles des extrémales de l'intégrale

$$I = \int F(q_1, \ldots, q_n ; q_1', \ldots, q_n' ; t)dt$$

se confondent avec les équations caractéristiques de l'invariant intégral relatif $\int \omega$, en posant

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F}{\partial q_i'} \delta q_i - \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_i' \frac{\partial F}{\partial q_i'} - F \right) \delta t,$$

et où l'on regarde $q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n', t$ comme $2n + 1$ variables indépendantes.

Dans le Calcul des variations on regarde $q_1, \ldots, q_n$ comme des fonctions arbitraires de t, et $q_1', \ldots, q_n'$ comme leurs dérivées. Dans l'espace à $n + 1$ dimensions $(q_1, \ldots, q_n, t)$ toute extrémale jouit de la propriété que l'intégrale I, étendue à un arc déterminé de cette courbe, est stationnaire vis-à-vis des arcs de courbe infiniment voisins admettant la même origine et la même extrémité. Mais on peut aussi se placer dans un espace à $2n + 1$ dimensions $(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n', t)$: une courbe extrémale jouit alors de la propriété que l'intégrale I étendue à un arc déterminé de cette courbe est stationnaire vis-à-vis des courbes infiniment voisines pour lesquelles les valeurs initiales et les valeurs finales *des seules coordonnées* $q_1, \ldots, q_n, t$, sont les mêmes que pour l'extrémale donnée. Si l'on se place à ce second point de vue, $q_1', \ldots, q_n'$ sont des fonctions de t qui n'ont *a priori* aucun rapport avec les dérivées de $q_1, \ldots, q_n$ par rapport à t.

185. Plus généralement partons d'une forme différentielle linéaire ω à $2n+1$ variables ; supposons la forme ω' de rang $2n$ et supposons enfin que n des coefficients des différentielles dans ω soient identiquement nuls. Nous pourrons donc poser

$$\omega = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 + \ldots + a_n \delta x_n - b \delta t,$$

les quantités $a_1, \ldots, a_n$, b étant des fonctions de $2n+1$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t$.

Les caractéristiques de l'invariant intégral relatif ω, ou, ce qui revient au même, de la forme quadratique extérieure ω', sont données par un système d'équations différentielles ordinaires

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad \frac{dy_i}{dt} = Y_i,$$

en supposant, ce que nous ferons, que t n'est pas une intégrale première des équations caractéristiques.

Cela posé considérons dans l'espace à $2n+1$ dimensions un arc de courbe allant du point $M_0(x_i^0, y_i^0, t^0)$ au point $M_1(x_i^1, y_i^1, t^1)$ et l'intégrale

$$I = \int_{M_0}^{M_1} a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots - b dt.$$

Calculons la variation de cette intégrale quand on passe de l'arc de courbe considéré à un arc de courbe infiniment voisin allant du point $(x_i^0 + \delta x_i^0, y_i^0 + \delta y_i^0, t^0 + \delta t^0)$ au point $(x_i^1 + \delta x_i^1, y_i^1 + \delta y_i^1, t^1 + \delta t^1)$. Nous aurons

$$\delta I = \Big[\omega_\delta\Big]_0^1 + \int_{M_0}^{M_1} \left(\delta \omega_d - d\omega_\delta\right) = \Big[\omega_\delta\Big]_0^1 - \int_{M_0}^{M_1} \omega'(d, \delta).$$

Si nous voulons que l'intégrale soit stationnaire vis-à-vis de tous les arcs de courbe infiniment voisins de l'arc de courbe donné, il faut qu'on ait, en se déplaçant sur l'arc de courbe donné,

$$\omega'(d, \delta) = 0$$

quels que soient $\delta x_i, \delta y_i, \delta t$; autrement dit *il faut que l'arc de courbe appartienne à une caractéristique de la forme* ω'. La valeur de l'intégrale sera stationnaire pour tous les arcs de courbe infiniment voisins pour lesquels ω_δ sera nul à l'origine et à l'extrémité, c'est-à-dire pour lesquels $x_1, \ldots, x_n, t$ auront les mêmes valeurs initiales et les mêmes valeurs finales que pour l'arc de courbe donné.

186. Supposons maintenant que nous restreignions le champ des courbes infiniment voisines de la courbe donnée aux courbes pour lesquelles les fonctions x_i, y_i de t satisfont aux n premières équations caractéristiques

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i.$$

Nous admettrons que les n fonctions $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes par rap-

port à $y_1, \ldots, y_n$, ce qui permet de prendre pour les x_i des fonctions *arbitraires* de t. Nous supposerons enfin que les valeurs initiales et finales de $x_1, \ldots, x_n, t$ sont les mêmes pour les courbes variées que pour la courbe primitive. Dans ces conditions on a

$$\delta I = -\int \omega'(d, \delta).$$

Il est facile de voir que dans $\omega'(\delta, d)$ il n'y a aucun terme en $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$. En effet le coefficient de δy_1 serait

$$\frac{\partial a_1}{\partial y_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial y_1} dx_2 + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial y_1} dx_n - \frac{\partial b}{\partial y_1} dt;$$

ce coefficient s'annule nécessairement en tenant compte des équations caractéristiques (1), par suite en tenant compte des équations (2) ; il est donc nul quand on se déplace sur l'extrémale. Comme dans l'expression de δI, il n'entre sous le signe $\int$ que $\delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta t$, les coefficients de $\delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta t$ doivent être nuls. Par suite *les extrémales sont données par les équations caractéristiques de* ω'.

II. — *Le principe de la moindre action de Maupertuis.*

187. Supposons que la fonction H d'Hamilton soit indépendante du temps. Considérons l'ensemble des mouvements pour lesquels la fonction H a une valeur constante donnée h. Les trajectoires correspondantes sont les caractéristiques de l'invariant intégral linéaire $\int \omega$, avec

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta q_i - h\delta t,$$

ou, ce qui revient au même, de l'invariant intégral $\int \varpi$, avec

$$\varpi = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta q_i;$$

la forme ϖ ne diffère en effet de ω que par une différentielle exacte. Cette forme ϖ est construite avec $2n$ variables, liées par la relation

$$H = h,$$

et n seulement des coefficients ne sont pas nuls. Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial H}{\partial q_n}}.$$

Par suite, dans l'espace à $2n - 1$ dimensions (q_i, p_i), les trajectoires sont les extrémales de l'intégrale

$$\int p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

soit qu'on considère toutes les courbes pour lesquelles les valeurs initiales et finales de $q_1, \dots, q_n$ sont données, soit qu'on considère seulement celles de ces courbes qui satisfont aux équations

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}$$

et, bien entendu, à la condition $H = h$.

188. Plaçons-nous par exemple au second point de vue. Supposons que les q_i soient les paramètres de position du système, les p_i étant les composantes des quantités de mouvement. Si on désigne par $2T$ la force vive et qu'on la décompose en ses termes du second degré, du premier degré et de degré zéro en $q_1', \dots, q_n'$, on a

$$H = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - T - U = T_2 - T_0 - U.$$

Substituons aux variables p_i les variables q_i'. On a par hypothèse

$$T_2(q') = T_0 + U + h,$$

$$\varpi = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T_2}{\partial q_i'} \delta q_i + T_1(\delta q_i).$$

Enfin on suppose qu'on a

$$\frac{dq_1}{q_1'} = \frac{dq_2}{q_2'} = \dots = \frac{dq_n}{q_n'} = \frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_2(q')}} = \frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_0 + U + h}}.$$

La quantité sous le signe $\int$ dans l'intégrale I est

$$\varpi_d = \sum q_i' \frac{\partial T_2}{\partial q_i'} \cdot \frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_0 + U + h}} + T_1(dq) = \sqrt{2(T_0 + U + h) . 2T_2(dq)} + T_1(dq).$$

Si donc on pose

$$2T = \sum a_{ij} q_i' q_j' + 2 \sum b_i q_i' + 2T_0,$$

on arrive au théorème suivant, qui constitue le *principe de la moindre action au sens de Maupertuis* :

Les trajectoires sont les extrémales de l'intégrale

$$\int \left(\sqrt{2(T_0 + U + h) . \sum a_{ij} dq_i dq_j} + \sum b_i dq_i \right)$$

vis-à-vis de toutes les trajectoires infiniment voisines assujetties à correspondre à la même position finale et à la même position finale du système et à satisfaire au théorème des forces vives $H = h$, avec une constante des forces vives donnée.

On retrouve le principe sous sa forme classique lorsque $T_1 = T_0 = 0$.

189. Exemple. — Dans le cas d'un point mobile libre rapporté à des axes fixes, les trajectoires sont les extrémales de l'intégrale

$$\int \sqrt{2(U+h)}\,ds.$$

Si le point est rapporté à des axes tournant autour de oz avec une vitesse angulaire constante α, et si de plus le champ de forces, indépendant du temps, est entraîné avec les axes, on a

$$\begin{aligned} 2T &= m[(x' + \alpha y)^2 + (y' - \alpha x)^2 + z'^2] \\ &= m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2m\alpha(xy' - yx') + m\alpha^2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Pour un point de masse 1, les trajectoires sont les extrémales de l'intégrale

$$\int \sqrt{\alpha^2(x^2+y^2) + 2U + 2h}\,ds - \alpha(x\,dy - y\,dx).$$

III. — *Généralisations.*

190. Ce qui vient d'être fait dans le cas où le temps n'entre pas explicitement dans H peut être fait aussi dans le cas où H ne contient pas une des autres variables q_i et p_i. Prenons, pour fixer les idées, le cas d'un point matériel libre de masse 1 soumis à une force centrale fonction de la distance. Considérons tous les mouvements se faisant dans le plan donné, que nous prendrons pour plan des xy, et obéissant à la loi des aires avec une constante donnée C. Les mouvements réels sont donnés par un système d'équations différentielles admettant l'invariant intégral relatif

$$\int \omega = \int \left[r'\delta r + r^2\theta'\delta\theta - \left(\frac{1}{2} r'^2 + \frac{1}{2} r^2\theta'^2 - U\right)\right]\delta t,$$

qui se réduit évidemment ici à

$$\int \varpi = \int r'\delta r - \left(\frac{1}{2} r'^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - U\right)\delta t.$$

La forme ϖ ne dépend plus que des variables r, r' et t, et l'une de ses équations caractéristiques est

$$\frac{dr}{dt} = r'.$$

Il en résulte que si l'on se donne, comme conditions initiales, les valeurs r_0

et t_0, et comme conditions finales les valeurs r_1 et t_1, le mouvement réel qui satisfait à ces conditions est celui qui rend stationnaire l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} r'dr - \left(\frac{1}{2} r'^2 + \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} - U\right)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} - U\right]dt$$

vis-à-vis de tous les mouvements infiniment voisins satisfaisant aux mêmes conditions aux limites et vérifiant la loi des aires avec la constante des aires C.

IV. — *Application à la propagation de la lumière dans un milieu isotrope.*

191. Considérons un milieu isotrope dont l'indice de réfraction n soit connu en chaque point. Le principe de Fermat conduit à définir les rayons lumineux comme les extrémales de l'intégrale

$$\int nds = \int n\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

En introduisant une variable auxiliaire t, on est dans le cas d'une intégrale

$$\int F(x, y, z\,;\; x', y', z'\,;\; t),$$

avec

$$F = n\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

L'invariant intégral linéaire relatif $\int \omega$ dont les rayons lumineux sont les caractéristiques est défini par la formule

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial x'}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\,\delta z - \left(x'\frac{\partial F}{\partial x'} + y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'} - F\right)\delta t,$$

qui devient ici

$$\omega = n\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,\delta x + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,\delta y + \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,\delta z\right),$$

ou encore

$$\omega = n(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z),$$

en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs d'une direction arbitraire. La forme ω dépend donc en réalité de 5 variables. Il serait facile de former ses équations caractéristiques et de montrer qu'elles contiennent en particulier les équations

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$

La direction (α, β, γ) n'est évidemment autre que celle de la tangente au rayon lumineux considéré.

192. La propriété de $\int \omega$ d'être un invariant intégral relatif conduit à cette propriété d'un pinceau de rayons lumineux que si l'on décrit une courbe fermée (C) entourant le pinceau, l'intégrale $\int n \cos \theta \delta s$ étendue à cette courbe, où l'on a désigné par θ l'angle de la tangente en un point M de (C) avec la tangente au rayon lumineux passant par M, est indépendante de la courbe (C) choisie. On peut démontrer facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que les rayons d'une congruence soient tous normaux à une même surface est que cette intégrale soit nulle pour tout pinceau de rayons pris dans la congruence. Cela correspond au théorème de Malus d'après lequel les rayons d'une congruence normaux à une surface sont normaux à une infinité de surfaces. La condition pour qu'il en soit ainsi est que la forme quadratique extérieure ω' soit nulle, ou, d'une manière plus précise, que la forme bilinéaire alternée $\omega'(\delta, \delta')$ soit nulle quand on y considère δ comme le symbole de la différentiation par rapport à un des paramètres de la congruence, et δ' comme le symbole de la différentiation par rapport à l'autre paramètre.

Les rayons lumineux qui se propagent dans le milieu considéré dépendent de quatre paramètres u_1, u_2, u_3, u_4. On appelle *transformation de Malus* une transformation effectuée sur ces paramètres et changeant toute congruence de rayons normaux à une surface en une autre congruence de rayons normaux à une surface. La forme ω' est, comme nous le savons, exprimable au moyen des u_i et de leurs différentielles. La transformation la plus générale de Malus est manifestement définie par l'équation

$$\omega'(u', du') = k\omega'(u, du),$$

k étant une fonction inconnue. La dérivation extérieure des deux membres donne immédiatement

$$[dk\omega'] = 0\,;$$

comme ω' est de rang 4, cela n'est possible que si $dk = 0$, c'est-à-dire si k est une *constante*. Par suite les transformations cherchées peuvent s'obtenir en exprimant que la forme linéaire

$$\omega(u', du') - k\omega(u, du)$$

est une différentielle exacte :

$$n(x', y', z')(\alpha' dx' + \beta' dy' + \gamma' dz') = kn(x, y, z)(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) + dV.$$

Définissons par exemple un rayon lumineux par les coordonnées (x_0, y_0) du point où il rencontre le plan des xy et les cosinus directeurs α_0, β_0, γ_0 de sa tangente en ce point. On aura

$$n(x_0', y_0', 0)(\alpha_0' dx_0' + \beta_0' dy_0') - kn(x_0, y_0, 0)(\alpha_0 dx_0 + \beta_0 dy_0) = dV.$$

1er *Cas.* — *Il n'y a aucune relation entre* x_0', y_0', x_0, y_0. Dans ce cas V est une fonction déterminée de x_0, y_0, x_0', y_0', et on a

$$-kn(x_0, y_0, 0)\alpha_0 = \frac{\partial V}{\partial x_0}, \quad -kn(x_0, y_0, 0)\beta_0 = \frac{\partial V}{\partial y_0},$$
$$n(x_0', y_0', 0)\alpha_0' = \frac{\partial V}{\partial x_0'}, \quad n(x_0', y_0', 0)\beta_0' = \frac{\partial V}{\partial y_0'}.$$

Les deux premières équations donnent x_0' et y_0'; les deux dernières donnent ensuite α_0' et β_0'.

2e *Cas.* — *Il y a une relation et une seule entre* x_0, y_0, x_0', y_0'. Soit

$$F(x_0, y_0 ; x_0', y_0') = 0$$

cette relation. En désignant par V une fonction arbitraire de x_0, y_0, x_0', y_0' et introduisant un paramètre auxiliaire λ, on a

$$-kn(x_0, y_0, 0)\alpha_0 = \frac{\partial V}{\partial x_0} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x_0}, \quad -kn(x_0, y_0, 0)\beta_0 = \frac{\partial V}{\partial y_0} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y_0},$$
$$n(x_0', y_0', 0)\alpha_0' = \frac{\partial V}{\partial x_0'} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x_0'}, \quad n(x_0', y_0', 0)\beta_0' = \frac{\partial V}{\partial y_0'} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y_0'}.$$

Les deux premières de ces quatre équations, jointes à l'équation $F = 0$, donnent x_0', y_0' et λ; les deux dernières donnent ensuite α_0' et β_0'.

3e *Cas.* — x_0' *et* y_0' *sont des fonctions déterminées de* x_0, y_0 :

$$x_0' = f(x_0, y_0), \quad y_0' = g(x_0, y_0);$$

V est alors une fonction de x_0, y_0 et on a

$$n(x_0', y_0', 0)\left(\alpha_0'\frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta_0'\frac{\partial g}{\partial x_0}\right) = kn(x_0, y_0, 0)\alpha_0 + \frac{\partial V}{\partial x_0},$$
$$n(x_0', y_0', 0)\left(\alpha_0'\frac{\partial f}{\partial y_0} + \beta_0'\frac{\partial g}{\partial y_0}\right) = kn(x_0, y_0, 0)\beta_0 + \frac{\partial V}{\partial y_0},$$

équations qui déterminent α_0' et β_0'.

193. La forme ω' est invariante et nous avons vu plus haut la propriété caractéristique des congruences de rayons pour lesquelles cette forme est identiquement nulle. La forme invariante $\frac{1}{2}\omega'^2$ a des applications en Optique ; son expression développée est

$$\frac{1}{2}\omega'^2 = n[\delta n(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z)(\delta\alpha\delta x + \delta\beta\delta y + \delta\gamma\delta z)]$$
$$- n^2([\delta\beta\delta\gamma\delta y\delta z] + [\delta\gamma\delta\alpha\delta z\delta x] + [\delta\alpha\delta\beta\delta x\delta y]).$$

Prenons par exemple tous les rayons lumineux qui traversent un élément de surface donné $d\sigma$ et dont les tangentes, aux points de traversée, sont parallèles aux droites intérieures à un cône d'ouverture infiniment petite $d\omega$. Les rayons considérés dépendent de quatre paramètres u_1, u_2, u_3, u_4, dont les deux premiers par exemple définissent la position du point de traversée de

l'élément $d\sigma$ et les deux derniers l'orientation de la tangente en ce point. Prenons sur chaque rayon lumineux l'*état* caractérisé par le point de traversée (x, y, z) correspondant et les cosinus directeurs (α, β, γ) de la tangente en ce point. Les trois premières quantités x, y, z ne dépendant que de u_1 et u_2, toute forme cubique extérieure en $\delta x, \delta y, \delta z$ est nulle ; par suite l'invariant $\frac{1}{2}\omega'^2$ se réduit, au signe près, à

$$\frac{1}{2}\omega'^2 = n^2([\delta\beta\delta\gamma\delta y\delta z] + [\delta\gamma\delta\alpha\delta z\delta x] + [\delta\alpha\delta\beta\delta x\delta y]).$$

Or l'on a, en désignant par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$,

$$[\delta y\delta z] = \lambda d\sigma, \quad [\delta z\delta x] = \mu d\sigma, \quad [\delta x\delta y] = \nu d\sigma\,;$$
$$[\delta\beta\delta\gamma] = \alpha d\omega, \quad [\delta\gamma\delta\alpha] = \beta d\omega, \quad [\delta\alpha\delta\beta] = \gamma d\omega;$$

par suite

$$\frac{1}{2}\omega'^2 = n^2(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)d\sigma d\omega = n^2\cos\theta d\sigma d\omega,$$

en désignant par θ l'angle de la normale à la surface avec la direction (moyenne) des rayons lumineux qui traversent la surface.

Cela posé, si l'on considère un ensemble quelconque de rayons lumineux dépendant de quatre paramètres, on peut prendre sur chaque rayon le point où ce rayon perce une surface donnée (S) ; tous les rayons passant par ce même point forment un cône solide et l'invariant intégral $\int \frac{1}{2}\omega'^2$ relatif à l'ensemble donné peut être donné par la formule

$$I = \int n^2 \cos\theta d\sigma d\omega,$$

$d\sigma$ désignant l'élément de surface de S, $d\omega$ l'ouverture d'un cône élémentaire de rayons partant d'un même point de S et faisant l'angle θ avec la normale à S.

Prenons par exemple l'ensemble de tous les rayons lumineux qui traversent un volume limité par une surface fermée (S) et prenons chaque rayon au point où il *sort* du volume. On aura, pour cet ensemble,

$$I = \int n^2 d\sigma \int \cos\theta d\omega.$$

Or l'intégrale $\int \cos\theta d\omega$, en prenant pour coordonnées la longitude φ et la colatitude θ sur la sphère de rayon 1, est égale à

$$\iint \sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$$

étendue à l'hémisphère $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$; elle est donc égale à π. Par suite on a

$$I = \pi \iint n^2 d\sigma.$$

Si le milieu est d'indice 1, les rayons sont rectilignes et l'intégrale I est égale au produit de l'aire de la surface par π.

194. Comme application des méthodes d'intégration générales exposées dans le Chapitre XVI, proposons-nous de déterminer la marche des rayons lumineux dans un milieu isotrope où l'indice de réfraction n ne dépend que d'une des coordonnées rectangulaires z. Ici on connaît la forme invariante ω', ainsi que trois transformations infinitésimales correspondant à une translation parallèle à Ox, une translation parallèle à Oy et une rotation autour de Oz :

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad A_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad A_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial \beta} - \beta\frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Comme ces trois transformations laissent invariante la forme

$$\omega_\delta = n(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z),$$

les trois formes invariantes linéaires $\omega'(\delta, A_i)$ se réduisent à

$$\begin{aligned} \delta\omega(A_1) &= \delta(n\alpha), \\ \delta\omega(A_2) &= \delta(n\beta), \\ \delta\omega(A_3) &= \delta[n(\beta x - \alpha y)]. \end{aligned}$$

On a donc trois intégrales premières

$$n\alpha, \quad n\beta, \quad n(\beta x - \alpha y).$$

Posons

$$n\alpha = a, \quad n\beta = b, \quad bx - ay = c;$$

la dernière relation montre que tout rayon lumineux est dans un plan parallèle à Oz. On a ensuite

$$\omega_\delta = \delta\left(ax + by + \int\sqrt{n^2 - a^2 - b^2}\,dz\right) - \left(x - a\int\frac{dz}{\sqrt{n^2 - a^2 - b^2}}\right)\delta a - \left(y - b\int\frac{dz}{\sqrt{n^2 - a^2 - b^2}}\right)\delta b.$$

Par suite on a, pour les trajectoires des rayons lumineux,

$$x = a\int\frac{dz}{\sqrt{n^2 - a^2 - b^2}} + a', \quad y = b\int\frac{dz}{\sqrt{n^2 - a^2 - b^2}} + b'.$$

CHAPITRE XIX.

LE PRINCIPE DE FERMAT ET L'ÉQUATION DE PFAFF INVARIANTE DE L'OPTIQUE.

I. — *Le principe de Fermat.*

195. Nous avons dans le Chapitre précédent considéré un invariant intégral de l'Optique des milieux isotropes, en y supposant l'indice de réfraction *indépendant du temps*.

Prenons maintenant un milieu quelconque dans lequel nous supposons la propagation des ondes lumineuses définie par une équation de Monge

$$(1) \qquad F(x, y, z, t; \quad dx, dy, dz, dt) = 0$$

homogène en dx, dy, dz, dt. Cela signifie que l'onde émanée d'un signal lumineux émis à l'instant t au point (x, y, z) a pour équation, à l'instant $t + dt$,

$$F(x, y, z, t; \quad X - x, \ Y - y, \ Z - z, dt) = 0.$$

La surface d'onde relative au point (x, y, z) et à l'instant t a, comme on sait, pour équation

$$F(x, y, z, t; \quad X - x, \quad Y - y, \quad Z - z, 1) = 0.$$

Dans un tel milieu un rayon lumineux est défini en prenant pour x, y, z trois fonctions de t satisfaisant à l'équation (1) et, de plus, à une condition supplémentaire qui constitue ce qu'on appelle le *principe de Fermat*. Parmi toutes les courbes satisfaisant à l'équation (1), ou, comme on dit, parmi toutes les *courbes intégrales* de l'équation de Monge (1), le rayon lumineux émané d'un point donné (x_0, y_0, z_0) à l'instant t_0 et passant par le point donné (x_1, y_1, z_1) est celle de ces courbes qui rend minimum le temps $t_1 - t_0$ nécessaire à la lumière pour aller du premier point au second. Autrement dit *les rayons lumineux sont les extrémales du problème de Mayer défini par l'équation de Monge* (1).

196. Rappelons rapidement comment le principe de Fermat conduit à la formation des équations différentielles qui définissent les rayons lumineux. Imaginons un rayon lumineux partant du point (x_0, y_0, z_0) à l'instant t_0 et aboutissant au point (x_1, y_1, z_1) à l'instant t_1. Etant donnée une courbe intégrale quelconque de l'équation (1) infiniment voisine du rayon lumineux, on peut supposer que x, y, z, t sont, tant pour le rayon lumineux que pour la courbe intégrale, exprimés en fonction d'un paramètre u, les valeurs o et 1 de ce paramètre correspondant, pour le rayon lumineux, à l'instant t_0 et à l'instant t_1. Soient

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z, \quad t + \delta t$$

les fonctions de u relatives à la courbe variée. Désignons par x', y', z', t', les dérivées de x, y, z, t par rapport à u. On a, en écrivant l'équation (1) sous la forme

$$F(x, y, z, t; \quad x', y', z', t') = 0 \tag{2}$$

et en variant cette équation,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t + \frac{\partial F}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z' + \frac{\partial F}{\partial t'}\delta t' = 0.$$

Multiplions le premier membre de cette dernière équation par λdu, λ étant une fonction indéterminée de u, et intégrons entre o et 1 ; nous aurons

$$\int_0^1 \left[\lambda \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \lambda \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \lambda \frac{\partial F}{\partial t}\delta t + \lambda \frac{\partial F}{\partial x'}\delta \frac{dx}{du} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y'}\delta \frac{dy}{du} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z'}\delta \frac{dz}{du} + \lambda \frac{\partial F}{\partial t'}\delta \frac{dt}{du}\right] du = 0,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z + \frac{\partial F}{\partial t'}\delta t\right)\right]_0^1 \\ &+ \int_0^1 \left\{\left[\lambda \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right]\delta x + \ldots + \left[\lambda \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial t'}\right)\right]\delta t\right\} du = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si la courbe intégrale voisine du rayon lumineux satisfait aux conditions initiales et finales imposées, on aura

$$(\delta x)_0 = (\delta y)_0 = (\delta z)_0 = (\delta t)_0 = (\delta x)_1 = (\delta y)_1 = (\delta z)_1 = 0,$$

et par suite

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial F}{\partial t'}\right)_1 (\delta t)_1 + \int_0^1 \left\{\left[\lambda \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right]\delta x + \ldots + \left[\lambda \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial t'}\right)\right]\delta t\right\} du = 0.$$

On peut se donner arbitrairement les fonctions $\delta x, \delta y, \delta z$ pourvu qu'elles s'annulent aux limites de l'intervalle ; déterminons alors la fonction λ

par la condition que le coefficient de δt dans la quantité sous le signe $\int$ soit nul. Pour que $(\delta t)_1$ soit nul quelle que soit la courbe intégrale variée, il faut et il suffit que les coefficients de δx, δy, δz dans la quantité sous le signe $\int$ soient nuls aussi.

Autrement dit, *en introduisant une quantité auxiliaire* λ, *les rayons lumineux sont donnés par l'équation* (2) *jointe aux équations*

$$
(4) \quad \begin{cases}
\lambda \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{du}\left(\lambda \dfrac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0, \\
\lambda \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{du}\left(\lambda \dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0, \\
\lambda \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{du}\left(\lambda \dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0, \\
\lambda \dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{d}{du}\left(\lambda \dfrac{\partial F}{\partial t'}\right) = 0.
\end{cases}
$$

L'élimination de λ donne du reste, à côté de l'équation (2), les trois équations

$$
(4') \quad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial x'}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial z'}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial F}{\partial t'}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial t'}},
$$

auxquelles il convient d'ajouter

$$
\frac{dx}{du} = x', \quad \frac{dy}{du} = y', \quad \frac{dz}{du} = z', \quad \frac{dt}{du} = t'.
$$

On voit immédiatement que l'équation (2) dérivée par rapport à u et les équations (4′) donnent $\dfrac{dx'}{du}, \dfrac{dy'}{du}, \dfrac{dz'}{du}, \dfrac{dt'}{du}$ par quatre équations du premier degré et les valeurs qu'on en déduirait ne dépendent pas de u. Le paramètre u n'intervient donc qu'en apparence, comme il est naturel, dans les équations finales, qui sont de la forme

$$
\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dt}{t'} = \frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y} = \frac{dz'}{Z} = \frac{dt'}{T},
$$

où X, Y, Z, T sont des fonctions déterminées de $x, y, z, t, x', y', z', t'$, homogènes du second degré en x', y', z', t', et satisfaisant à

$$
x' \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} + t' \frac{\partial F}{\partial t} + X \frac{\partial F}{\partial x'} + Y \frac{\partial F}{\partial y'} + Z \frac{\partial F}{\partial z'} + T \frac{\partial F}{\partial t'} = 0.
$$

En réalité *les équations différentielles des rayons lumineux sont des équations différentielles ordinaires du premier ordre en* $x, y, z, t, \dfrac{x'}{t'}, \dfrac{y'}{t'}, \dfrac{z'}{t'}$, *ces sept quantités étant supposées liées par la relation* (2).

II. — *L'équation de Pfaff invariante de l'Optique.*

197. Considérons maintenant une famille de rayons lumineux dépendant d'un paramètre α et prenons chacun de ces rayons lumineux dans un intervalle de temps (t_0, t_1) dépendant de α et correspondant à un point de départ (x_0, y_0, z_0) variable avec α et à un point d'arrivée (x_1, y_1, z_1) également variable avec α. Si l'on désigne pour chaque rayon lumineux par λ la fonction auxiliaire qui intervient dans les équations (4), et si l'on applique la formule (3), on obtient

$$\lambda_1\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_1 \delta z_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial t'}\right)_1 \delta t_1\right]$$
$$= \lambda_0\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \delta z_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial t'}\right)_0 \delta t_0\right].$$

De là résulte que *le système différentiel des rayons lumineux*, considéré comme un système d'équations différentielles du premier ordre en x, y, z, t, $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$, liées par (2), *admet l'équation de Pfaff invariante*

$$\omega_\delta \equiv \frac{\partial F}{\partial x'}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z + \frac{\partial F}{\partial t'}\delta t = 0.$$

Cette équation de Pfaff, qui ne dépend elle aussi que des rapports mutuels de x', y', z', t', est au fond à six variables; son système caractéristique est un système d'équations différentielles ordinaires, qui par suite ne peut qu'être identique aux équations des rayons lumineux.

Nous arrivons donc à la conclusion que *les rayons lumineux sont les caractéristiques de l'équation de Pfaff*

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z + \frac{\partial F}{\partial t'}\delta t = 0; \tag{5}$$

c'est l'équation de Pfaff invariante de l'Optique.

198. Dans la pratique l'équation de Monge (1) s'écrit sous la forme

$$\Omega\left(x, y, z, t; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \equiv F\left(x, y, z, t; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, 1\right) = 0.$$

En posant

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

il est facile de former l'équation de Pfaff invariante. On a en effet

$$x'\frac{\partial F}{\partial x'} + y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'} + t'\frac{\partial F}{\partial t'} = 0;$$

par suite l'équation (5) peut s'écrire

$$t'\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x + t'\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y + t'\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z - \left(x'\frac{\partial F}{\partial x'} + y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta t = 0.$$

Le premier membre étant homogène en x', y', z', t', on peut remplacer respectivement ces arguments par $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, 1. On a donc, pour l'équation de Pfaff invariante, la forme

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}}\delta x + \frac{\partial\Omega}{\partial\dot{y}}\delta y + \frac{\partial\Omega}{\partial\dot{z}}\delta z - \left(\dot{x}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{z}}\right)\delta t = 0. \tag{6}$$

Prenons par exemple un milieu dans lequel la surface des ondes est une sphère, et soit $\frac{c}{n}$ la vitesse de propagation de la lumière, c étant la vitesse dans le vide et n l'indice de réfraction (fonction de x, y, z, t). L'équation de Monge est ici

$$n^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - c^2 = 0,$$

et l'équation de Pfaff invariante est

$$n^2(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) - c^2\delta t = 0.$$

En posant

$$\alpha = \frac{n\dot{x}}{c}, \qquad \beta = \frac{n\dot{y}}{c}, \qquad \gamma = \frac{n\dot{z}}{c},$$

elle devient

$$n(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z) - c\delta t = 0;$$

α, β, γ sont alors les cosinus directeurs de la tangente au rayon lumineux.

Si n ne dépend pas du temps, les lois de propagation de la lumière admettent la transformation infinitésimale $\frac{\partial f}{\partial t}$ et par suite les équations différentielles qui donnent les rayons lumineux admettent la *forme* invariante

$$\delta t - \frac{n}{c}(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z).$$

Les équations différentielles qui donnent les courbes (geométriques) décrites par les rayons lumineux admettent par suite l'invariant intégral *relatif*

$$\int n(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z):$$

nous retrouvons le point de vue du Chapitre précédent (n° **191**).

199. Les équations caractéristiques de l'équation de Pfaff invariante de l'Optique peuvent se ramener, comme on sait (n° **152**), aux équations caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre (la réciproque est du reste vraie, mais nous ne nous y arrêterons pas).

L'existence d'un invariant intégral sera assurée toutes les fois que la loi de propagation de la lumière admettra une transformation infinitésimale; dans tous

ces cas on pourra ramener la recherche des rayons lumineux à un problème *ordinaire* de calcul des variations.

Prenons par exemple le cas où la loi de propagation de la lumière est donnée par l'équation de Monge

$$n^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2dt^2 = 0,$$

l'indice de réfraction pouvant dépendre de x, y, t, mais *ne dépendant pas de* z. On a alors la transformation infinitésimale

$$Af = \frac{\partial f}{\partial z};$$

la forme

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(A)} = \frac{n(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z) - c\delta t}{n\gamma} = \delta z + \frac{\alpha}{\gamma}\delta x + \frac{\beta}{\gamma}\delta y - \frac{c}{n\gamma}\delta t$$

est une forme invariante. Une fois connues les coordonnées x et y en fonction de t, on aura z par une quadrature. Quant aux équations différentielles qui donnent x et y en fonction de t, elles admettent l'invariant intégral relatif

$$\int \frac{\alpha}{\gamma}\delta x + \frac{\beta}{\gamma}\delta y - \frac{c}{n\gamma}\delta t$$

ou, ce qui revient au même, l'invariant intégral

$$\int \xi\delta x + \eta\delta y - \zeta\delta t,$$

où ξ, η, ζ sont trois quantités liées par la relation

$$1 + \xi^2 + \eta^2 = \frac{n^2}{c^2}\zeta^2.$$

Les équations des caractéristiques comprennent en particulier les équations

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dt}{\frac{n^2}{c^2}\zeta} = \frac{\sqrt{dt^2 - \frac{n^2}{c^2}(dx^2 + dy^2)}}{\frac{n}{c}}.$$

Les rayons lumineux rendent donc stationnaire l'intégrale

$$\int -\xi dx - \eta dy + \zeta dt = \int \sqrt{\frac{c^2}{n^2}dt^2 - dx^2 - dy^2}.$$

III. — *Le principe de Fermat indépendant du repérage de l'espace-temps.*

200. Il importe de remarquer que l'équation de Pfaff invariante de l'Optique est liée à l'équation de Monge qui définit la loi de propagation de

la lumière d'une manière *indépendante du repérage choisi pour l'espace et le temps*. Autrement dit l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\,\delta z + \frac{\partial F}{\partial t'}\,\delta t = 0$$

est *covariante* de l'équation

$$F(x, y, z, t; x', y', z', t') = 0$$

vis-à-vis de tout changement de variables effectué sur x, y, z, t. Cela résulte au fond du principe de Fermat lui-même ; mais on peut aussi retrouver cette équation de la manière suivante, où rien ne différencie les unes des autres les variables x, y, z, t.

Considérons le système de Pfaff

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dt}{t'}, \tag{7}$$

où $x, y, z, t, \frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}$ sont supposés liés par l'équation (2), et cherchons le système *dérivé* de (7). On appelle ainsi le systéme formé des équations de Pfaff qui sont des combinaisons linéaires des équations (7) et qui jouissent de la propriété que la dérivée extérieure de leur premier membre est nulle en tenant compte des équations (7). En posant, comme plus haut,

$$\frac{x'}{\dot{x}} = \frac{y'}{\dot{y}} = \frac{z'}{\dot{z}} = \frac{t'}{1},$$

toute combinaison linéaire des équations (7) est de la forme

$$u(dx - \dot{x}dt) + v(dy - \dot{y}dt) + w(dz - \dot{z}dt) = 0.$$

Si l'on tient compte des équations (7), la dérivée extérieure du premier membre se réduit à

$$[dt(ud\dot{x} + vd\dot{y} + wd\dot{z})];$$

la condition pour qu'elle soit nulle en tenant compte des équations (7) et de l'équation (2) différentiée est

$$[dt(ud\dot{x} + vd\dot{y} + wd\dot{z})\,(dx - \dot{x}dt)\,(dy - \dot{y}dt)\,(dz - \dot{z}dt)dF] = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$\left[dx\,dy\,dz\,dt(ud\dot{x} + vd\dot{y} + wd\dot{z})\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\,d\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\,d\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\,d\dot{z}\right)\right] = 0.$$

Cela donne

$$\frac{u}{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}} = \frac{v}{\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}} = \frac{w}{\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}}.$$

Le système dérivé du système (7) est donc tout simplement l'équation de Pfaff

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\,(dx - \dot{x}dt) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\,(dy - \dot{y}dt) + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\,(dz - \dot{z}dt) = 0,$$

dont les caractéristiques sont les rayons lumineux.

Il résulte de là que, même en Optique, la coordonnée temps ne joue pas un rôle essentiellement différent de celui joué par les coordonnées spatiales. Les lois fondamentales de l'Optique ne sont pas liées nécessairement aux notions classiques de l'espace et du temps et se transportent telles quelles dans la théorie de la relativité.

201. Par exemple, en choisissant un repérage convenable pour l'Univers (espace-temps), les lois de propagation de la lumière dans le champ de gravitation produit par une masse unique (réduite à un point), sont fournies par l'équation de Schwarzschild

$$\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi) - \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 = 0.$$

Ces lois admettent la transformation infinitésimale $\frac{\partial f}{\partial t}$; les rayons lumineux, considérés au seul point de vue de l'espace, sont donc définis comme réalisant l'extremum de l'intégrale

$$\int\sqrt{\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2} + \frac{r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)}{1-\frac{2m}{r}}}.$$

La propagation se fait dans un plan passant par le centre d'attraction et, si on suppose ce plan défini par $\varphi = 0$, on a à réaliser l'extremum de l'intégrale

$$\int\sqrt{\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2} + \frac{r^2 d\theta^2}{1-\frac{2m}{r}}}.$$

En se servant de l'existence de la transformation infinitésimale $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, l'intégration n'offre aucune difficulté et donne

$$\theta = \int \frac{C\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{C^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)}{r^2}}}.$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

H. Poincaré. — *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1899.

P. Appell. — *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, chap. xxv, Paris, Gauthier-Villars.

H. Poincaré. — *Sur les résidus des intégrales doubles*; Acta Mathem., t. IX, 1887, p. 321-380.

— *Analysis situs*; Journal Ec. Polyt., 1895.

Th. de Donder. — *Etude sur les invariants intégraux*; Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XV (1901), p. 66-131; t. XVI (1902), p. 155-179.

— *Sur les invariants intégraux*; Atti del IV° Congresso internazionale dei Matematici, t. II, Roma, 1909, p. 129-137.

— *Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé*; Bulletin de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences), 1908, p. 795-811.

— *Sur les invariants intégraux relatifs*; ibid., 1909, p. 66-83.

— *Applications du multiplicateur généralisé*; ibid., 1909, p. 610-621.

— *Sur le multiplicateur généralisé*; ibid., p. 268-286.

— *Sur les invariants intégraux relatifs et leurs applications à la Physique mathématique*; ibid., 1911, p. 50-70.

— *Quelques remarques sur le multiplicateur de Jacobi et le multiplicateur généralisé*; ibid., 1911, p. 740-749.

— *Introduction à la théorie des invariants intégraux*; ibid., 1913, p. 1043-1073.

— *Applications nouvelles des invariants intégraux*; Mémoires de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences) (2), I, (1904).

— *Sur les équations canoniques de Hamilton-Volterra*; ibid., (2), III.

G. Kœnigs. — *Application des invariants intégraux à la réduction au type canonique d'un système quelconque d'équations différentielles*; C. R. Acad. des Sc. Paris, t. CXXI, (1895), p. 875-878.

— *Sur les invariants intégraux*; ibid., t. CXXII, (1896), p. 25-27.

S. Lie. — *Ueber Integralinvarianten und Differentialgleichungen*; Videnskabsselskabets Skrifter, Christiania, 1902, n° 1 (73 p.).

K. Zorawski. — *Ueber gewisse Transformationseigenschaften der vielfachen Integrale*; Bull. Acad. des sciences de Cracovie (sc. math. et natur.), 1909, p. 483-542.

R. Hargreaves. — *Integralforms and their connexion with physical equations*; Trans. Cambridge Philosoph. Society; t. XXI (1912), p. 107-122.

R. Dontot. — *Sur les invariants intégraux de la propagation par ondes*; Bull. Soc. Math. de France, t. XLII (1914), p. 53-91.

E. Vessiot. — *Sur les invariants intégraux et quelques points d'optique géométrique*; Bull. Soc. Math. de France, t. XLII (1914), p. 142-167.

— *Sur un invariant intégral de l'Hydrodynamique et son application à la relativité* ; C. R. Acad. des Sc. de Paris, 30 déc. 1918.

E. Goursat. — *Sur les invariants intégraux* ; Journal Math. pures et appliquées (5), t. IV, (1908), p. 331-365.

— *Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux* ; ibid., (7), t. I, (1915), p. 241-259.

— *Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales et sur une généralisation du problème de Pfaff* ; Ann. Fac. Sc. Toulouse, t. VII, (1915).

E. Cartan. — *Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables* ; C. R. Acad. des Sc. Paris, t. CXXXV, (1902), p. 1415-1417 ; 1564-1566.

T. Chella. — *Vantaggi che si possono trarre da noti invarianti integrali e differenziali in alcuni problemi d'integrazione* ; Annali R. Scuola norm. sup. Pisa (sc. fis.-mat.), t. XI, (1910), p. 1-137.

Sur le calcul dit symbolique applicable aux formes différentielles extérieures et sur certains calculs symboliques connexes on pourra consulter, outre les mémoires précédents :

E. Cartan. — *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff* ; Ann. Ec. Norm., (3), t. XVI, (1899), p. 239-332.

A. Buhl. — *Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes* ; Ann. Fac. Sc. Toulouse, t. IV, (1912) ; t. VI, (1914) ; t. VII, (1915).

Enfin sur le sujet connexe des invariants intégraux des groupes continus de transformations, où le point de vue est un peu différent de celui de H. Poincaré, on pourra consulter :

S. Lie. — *Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten* ; Ber. Sächs. Gesellsch., Leipzig, 1897, p. 342-357.

— *Ueber die Integralinvarianten und ihre Verwertung für die Theorie der Differentialgleichungen*, ibid., 1897, p. 369-410.

K. Zorawski. — *Ueber Integralinvarianten der continuierlichen Transformationsgruppen* ; Bull. Acad. Sc. Cracovie (sc. math. et nat.), 1895, p. 127-130.

E. Cartan. — *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé* ; Bull. Soc. Math. France, t. XXIV (1896), p. 140-177.

Th. de Donder. — *Sur un problème relatif aux invariants intégraux* ; Bull. Acad. royale de Belgique (classe des sc.), 1912, p. 583-590.

R. Deltheil. — *Sur la théorie des probabilités géométriques* ; thèse ; Toulouse, Ed. Privat, 1920.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER.

Le principe de la moindre action d'Hamilton et le tenseur « quantité de mouvement-énergie ».

CHAPITRE II.

L'invariant intégral à deux dimensions de la Dynamique.

CHAPITRE III.

Les invariants intégraux et les formes différentielles invariantes.

CHAPITRE IV.

Le système caractéristique d'une forme différentielle.

CHAPITRE V.

Les systèmes de Pfaff invariants et leurs systèmes caractéristiques.

CHAPITRE VI.

Les formes à multiplication extérieure.

CHAPITRE VII.

Les formes différentielles extérieures et leurs formes dérivées.

CHAPITRE VIII.

Le système caractéristique d'une forme différentielle extérieure. Formation des invariants intégraux.

CHAPITRE IX.

Les systèmes différentiels qui admettent une transformation infinitésimale.

CHAPITRE X.

Les systèmes de Pfaff complètement intégrables.

CHAPITRE XI.

La théorie du dernier multiplicateur.

CHAPITRE XII.

Les équations qui admettent un invariant intégral linéaire relatif.

CHAPITRE XIII.

Les équations qui admettent un invariant intégral linéaire absolu.

CHAPITRE XIV.

Les équations différentielles qui admettent une équation de Pfaff invariante.

CHAPITRE XV.

Les équations différentielles qui admettent plusieurs invariants intégraux linéaires.

CHAPITRE XVI.

Les équations différentielles qui admettent des transformations infinitésimales données.

CHAPITRE XVII.

Application des théories précédentes au problème des n corps.

CHAPITRE XVIII.

Les invariants intégraux et le Calcul des variations.

CHAPITRE XIX.

Le principe de Fermat et l'équation de Pfaff invariante de l'Optique.

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie Bussière.